lunedì 21 marzo 2016 08:31

Salvare le istruzioni e quanti appare nella command Window usare

diary nomeFile
↳ file di testo

Per avere informazioni su di un comando Matlab o Octave

help nomeComando
doc nomeComando

Esempio : help diary

MATRICI DIAGONALI

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A = \text{diag}([1\ \ 2\ \ 4])$$

Se l'ingresso di diag é una MATRICE, diag restituisce il vettore con gli elementi della diagonale:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad d = \text{diag}(B)$$

ESERCIZIO

Data la matrice quadrata A, costruire la matrice che ha nella diagonale solo gli elementi della diagonale di A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \text{diag}(\text{diag}(A))$$

↳ [1 5 9]

Per pulire (ovvero cancellare le variabili) presenti nel WORKSPACE uso

clear

Per vedere le variabili presenti nel workspace uso

whos

lunedì 21 marzo 2016 08:31

OPERATORE :

Serve a creare vettore, come già visto.

```
>> x=0:2:7
x =

   0   2   4   6

>> Y=3:-1:1
Y =

   3   2   1

>> Z=3:-1:4
Z = [](1x0)
>> t=4:8
t =

   4   5   6   7   8

>>
```

ESERCIZIO Creare la tavola Pitagorica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 10 \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 20 \\ 3 & 6 & 9 & \cdots & 30 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 9 & 18 & 27 & \cdots & 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 10 \end{pmatrix}$$

In MatLab

TabPitagorica = (1 : 9)' * (1 : 10)

lunedì 21 marzo 2016 08:31

FUNZIONE LINSPACE

Sintassi:

linspace(inizio , fine , numPunti)

crea un vettore che ha

inizio			.....		fine

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{numPunti equispaziati}}$

ESEMPIO

$$x = \text{linspace}(1, 5, 4)$$

$$= [\ 1 \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad 5\ ]$$

$\xleftrightarrow{p} \ \xleftrightarrow{p} \ \xleftrightarrow{p}$

$$p = \frac{5-1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$2,\overline{3} = 1 + \frac{4}{3}$$

$$3,\overline{6} = 1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$$

GRAFICI DEL TIPO $y = f(x)$, $x \in [a,b]$

Uso

plot(vettore ascisse , vettore ordinate , '-og')

```
>> % grafico di y=sin(x) x i
>> x = linspace(-pi,pi,500);
>> y = sin(x);
>> plot(x,y)
>> % aggiungo griglia
>> grid on
>> % tolgo la griglia
>> grid off
```

```
>> % aggiungo legenda asse x
>> xlabel('asse x')
>> xlabel('asse x','fontSize',18)
>> ylabel('asse y','fontSize',18)
< il grafico di cos(x)
>> yc = cos(x);
>> % per tenere il precedente
>> % grafico scrivo...
>> hold on
>> plot(x,yc,'m','lineWidth',3)
>> legend('sin(x)','cos(x)')
>>
```

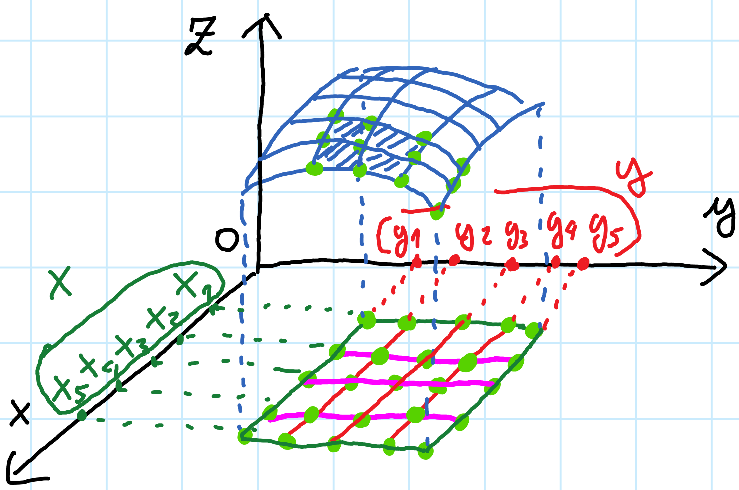
lunedì 21 marzo 2016 08:31

ESERCIZIO Tracciare i grafici di

$f(x) = e^x$ → exp(x) , $g(x) = \ln(x)$ → log(x) in [1, 2]

Aggiungere griglie, legende agli assi.

GRAFICI BIDIMENSIONALI $z = f(x,y)$




```
[X, Y] = meshgrid(0:6, 2:5);
Z = X.^2 + Y.^2;
surf(X, Y, Z)
```

Pag. 6

lunedì 21 marzo 2016 08:31

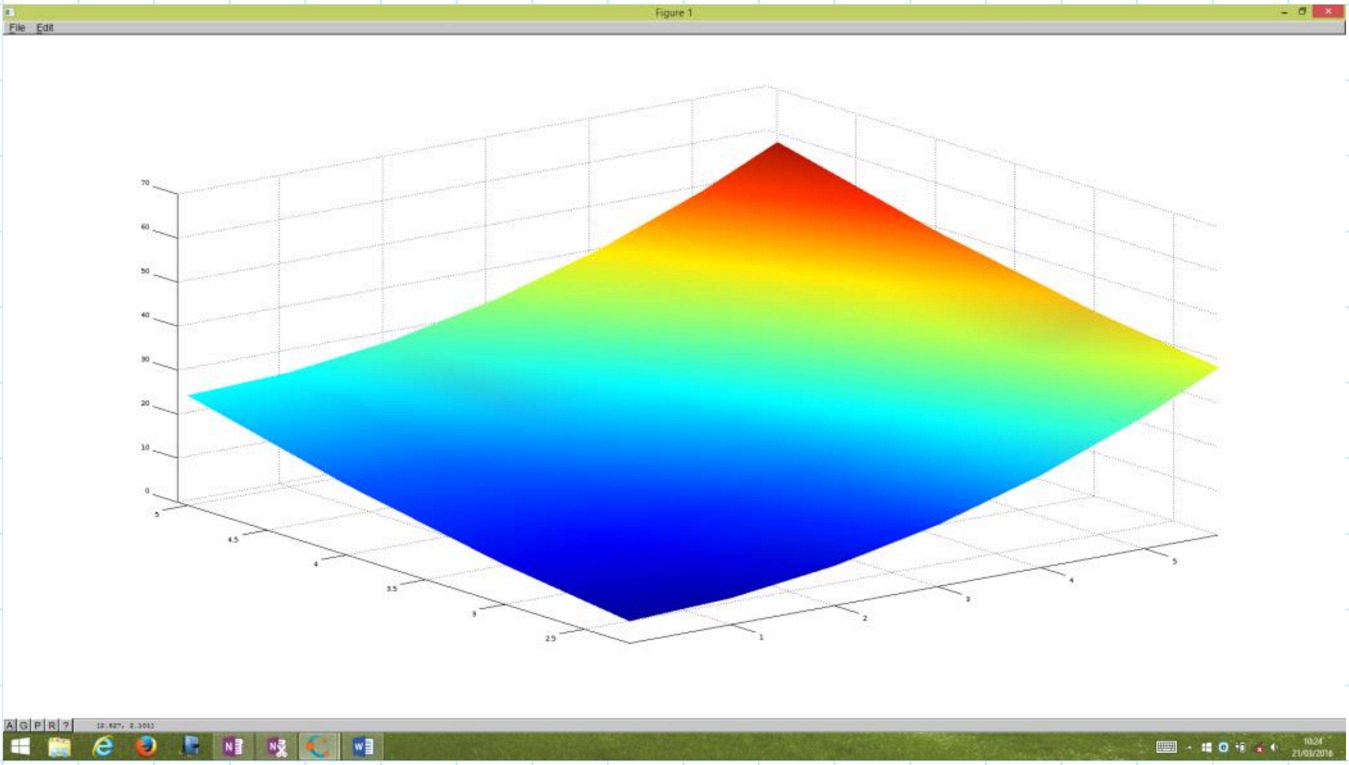
```
>> [X,Y]=meshgrid(0:6,2:5)
X =

  0   1   2   3   4   5   6
  0   1   2   3   4   5   6
  0   1   2   3   4   5   6
  0   1   2   3   4   5   6

Y =

  2   2   2   2   2   2   2
  3   3   3   3   3   3   3
  4   4   4   4   4   4   4
  5   5   5   5   5   5   5

>> Z=X.^2+Y.^2;
>> surf(X,Y,Z)
>> surf(X,Y,Z)
>> shading interp
>>
```



Ritorniamo sull'ordine di convergenza della successione $x_k \to \xi$ con errore $e_k = \xi - x_k$.

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^{p}} = M, \quad M \neq 0$$

p → ordine di convergenza

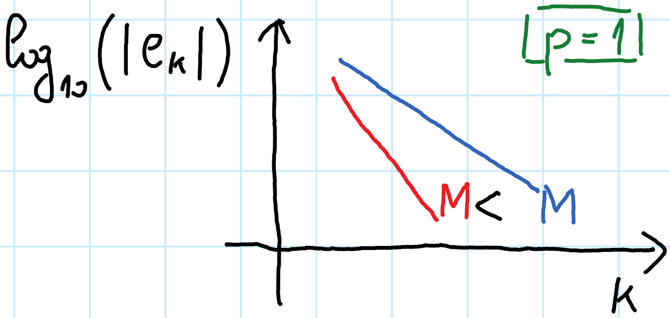
M → costante asintotica dell'errore

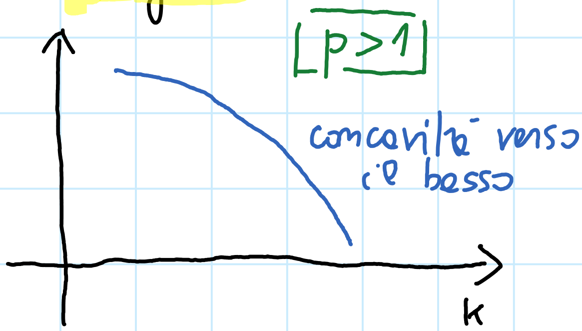
La convergenza di x_k è detta

lineare : $p = 1$

superlineare : $p > 1$. In particolare, per $p = 2$ si parla di convergenza quadratica.

OSS. Dal punto di vista grafico, i grafici di $\log_{10}(|e_k|)$ hanno i seguenti andamenti QUALITATIVI, almeno per k grande





Facciamo vedere la prima. Se $p = 1$ è

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = M \implies \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} \approx M \quad \text{ossia}$$

$$|e_k| \approx M |e_{k-1}|$$

$$|e_k| \approx M|e_{k-1}| \;, \quad k-1,\, k-2, \dots, 2, 1, 0$$

$$\approx M\left(M|e_{k-2}|\right) = M^2 |e_{k-2}|$$

$$\approx M^2\left(M|e_{k-3}|\right) = M^3 |e_{k-3}|$$

$$\approx \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$= M^k \cdot |e_{\underset{\parallel\, k-k}{0}}|$$

Allora ho trovato che $\boxed{|e_k| \approx M^k \cdot |e_0|}$ (1)

Due considerazioni.

(1) Grafico di $\log_{10}(|e_k|)$. Ho

$$\log_{10}(|e_k|) \cong \log_{10}(M^k \cdot |e_0|) =$$

$$= k \log_{10}(M) + \log_{10}(|e_0|)$$

È una retta nel piano $(k, \log_{10}(|e_k|))$.

(2) L'errore decresce se la retta è decrescente ossia per $\log_{10}(M) < 0 \iff M < 1$.

OSS. Usando la formula (1) è possibile <u>stimare</u> il numero k necessario per avere

lunedì 21 marzo 2016 08:31

$$\frac{|e_k|}{|e_0|} < \epsilon \quad , \quad \epsilon \text{ dato}$$

Dalle formule (1) ho $\frac{|e_k|}{|e_0|} \approx M^k$ per cui impongo che sia

< 0 perché è $M<1$

$$M^k < \epsilon \Rightarrow k \log_{10}(M) < \log_{10}(\epsilon)$$

$$\Rightarrow k > \frac{\log_{10}(\epsilon)}{\log_{10}(M)}$$

ESERCIZIO Stimare k per avere $|e_k|/|e_0| < 10^{-6}$ per $M = 0.1$.

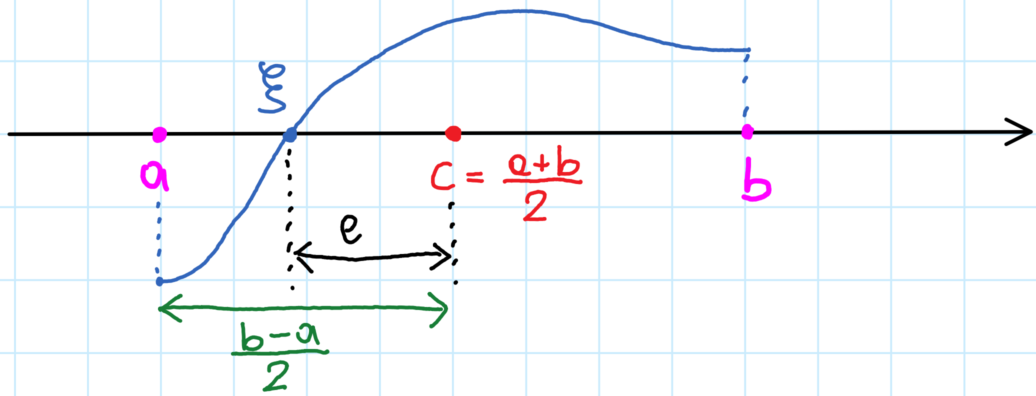
È $k > \frac{\log_{10}(10^{-6})}{\log_{10}(0.1)} = \frac{-6}{-1} = 6$

Quindi servono circa 6 iterazioni.

METODO DI BISEZIONE

Ipotesi: l'intervallo $[a,b]$ contiene una SOLA soluzione dell'equazione $f(x)=0$ con f CONTINUA. Assumo poi che la soluzione $\xi \in (a,b)$.

Vediamo come migliorare questa informazione.



Scelgo come approssimazione di ξ il punto medio di $[a,b]$:

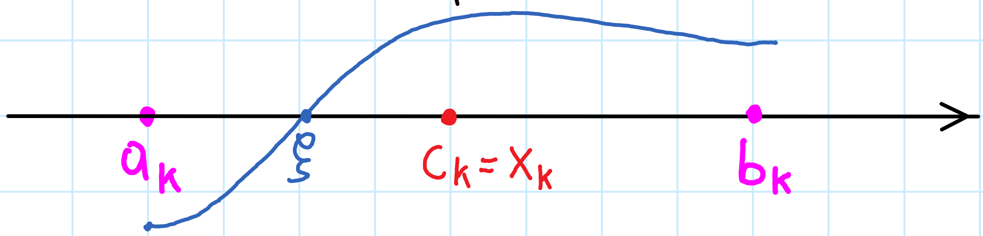
$$c = \frac{a+b}{2}$$

con un errore massimo pari a $\frac{b-a}{2}$ ossia

$$|e| \leq \frac{b-a}{2}$$

Idea: ripeto quanto detto considerando il sottointervallo $[a,c]$ o $[c,b]$ che contiene la radice ξ. Questo intervallo è quello che verifica $f(a)$ e $f(c)$ o $f(c)$ e $f(b)$ con valori opposti.

Ogni volta dimezzo l'ampiezza dell'intervallo che contiene la radice; formalizziamo l'idea:



<u>se</u> $\xi \in [a_k, c_k]$

$a_{k+1} \leftarrow a_k$

$b_{k+1} \leftarrow c_k$

<u>altrimenti</u> <u>se</u> $\xi \in [c_k, b_k]$

$a_{k+1} \leftarrow c_k$

$b_{k+1} \leftarrow b_k$

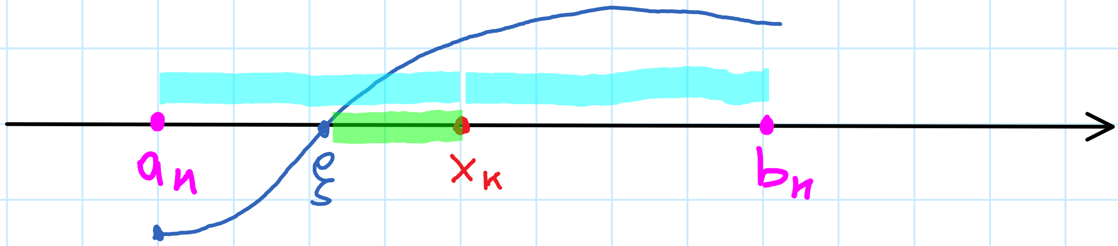
<u>fine se</u>

La successione a_n è monotona CRESCENTE e
b_n è " DECRESCENTE
per cui sto restringendo l'intervallo che contiene la radice ξ. Ad ogni passo lo dimezzo:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vediamo il legame tra k e l'errore e_k.

Vediamo il legame tra k e l'errore e_k.



$$|e_k| = |\xi - x_k| \le \frac{1}{2}(b_k - a_k)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2^2} =$$

$$= \frac{1}{2^2} \cdot \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^3} =$$

$$\vdots$$

$$= \dots\dots\dots\dots$$

$$= \frac{b_0 - a_{0 = k-k}}{2^{k+1}} \qquad \text{con } a_0 = a, \; b_0 = b$$

Quindi è

$$\boxed{|e_k| \le \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}} \qquad (2)$$

Da (2) posso ricavare k affinché sia $|e_k| < \epsilon$:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} < \epsilon \implies \frac{b_0 - a_0}{\epsilon} < 2^{k+1} \implies$$

$$\log_{10}\left(\frac{b_0-a_0}{\epsilon}\right) < (k+1)\cdot\log_{10}(2)$$

o

$$k > \frac{\log_{10}\left(\frac{b_0-a_0}{\epsilon}\right)}{\log_{10}(2)} - 1$$

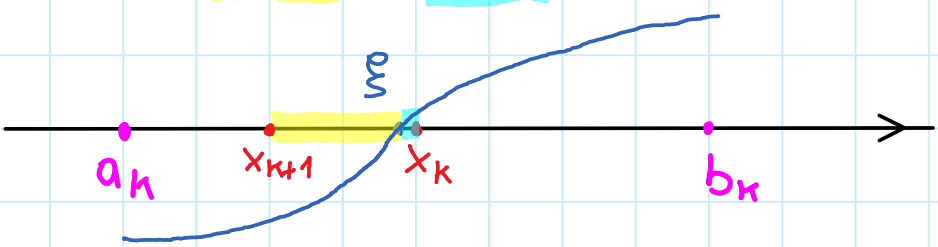
Prendo l'intero k maggiore del numero precedente.

ESEMPIO: Dato $\xi \in [\overset{a_0}{0}, \overset{b_0}{1}]$ e $\epsilon = 10^{-6}$ ho bisogno di

$$k > \frac{\log_{10}\left(\frac{\overset{b_0}{1}-\overset{a_0}{0}}{10^{-6}}\right)}{\log_{10}(2)} - 1 = 18.93$$

Prendo $k = 19$.

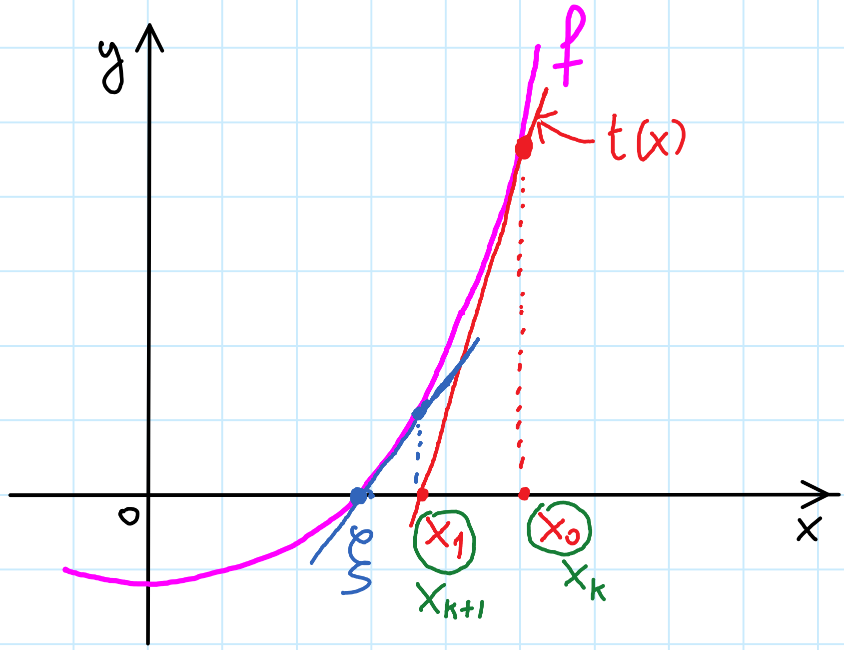
OSS. La riduzione dell'errore nel metodo di bisezione NON è detto che sia monotona. Ossia, può essere $|e_{k+1}| > |e_k|$.



OSS. Questo metodo porta SEMPRE alla soluzione con l'approssimazione voluta.

METODO DI NEWTON

È uno dei metodi più usati. Vediamo l'idea geometrica da cui nasce.



Ricaviamo la relazione che lega x_{k+1} e x_k: è

$$t(x) = f'(x_k)\cdot(x - x_k) + f(x_k)$$

Ho $t(x_{k+1}) = 0$:

$$f'(x_k)\cdot(x_{k+1} - x_k) + f(x_k) = 0 \implies$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots} \qquad (3)$$

purché $f'(x_k) \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ che sono soddisfatte se $f'(\xi) \neq 0$ e $x_k \approx \xi$.

lunedì 21 marzo 2016 12:20

Soluzione esercizi proposti lezione scorsa

① Consideriamo $f(x) = 1 - \cos(x)$. Per $x \approx 0$ è

$$K(x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{x \,\mathrm{sen}(x)}{1-\cos(x)} \right| \approx$$

$$\approx \left| \frac{x \cdot x}{\frac{x^2}{2}} \right| = 2$$

dove abbiamo usato gli sviluppi di MacLaurin per $x \to 0$

$$\mathrm{sen}(x) = x + o(x) \implies \mathrm{sen}(x) \approx x$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \implies 1 - \cos(x) \approx \frac{x^2}{2}$$

Quindi il problema è ben condizionato essendo $K(x)$ piccolo.

La formula è instabile per $x \approx 0$ perché è $\cos(x) \approx 1$ e quindi

La differenza $1-\cos(x)$ fa perdere molte cifre significative. Si può renderla stabile riscrivendola come

$$f(x) = 1-\cos(x) = 1-\left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$
$$= 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

② Si procede in modo analogo per $f(x) = x-\operatorname{sen}(x)$. È

$$K(x) = \left|\frac{x\, f'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x\,(1-\cos(x))}{x-\operatorname{sen}(x)}\right|$$

$x \approx 0 \Rightarrow$ uso sviluppi

$$= \left|\frac{x\cdot\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{\cancel{x}-\left(\cancel{x}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^2)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\right| \approx \frac{6}{2} \text{ per } x\to 0$$

Quindi, il problema di calcolare $f(x)$ per $x \approx 0$ è ben condizionato.
La formula non è però stabile perché per $x \approx 0$ è $x \approx \sin(x)$ e quindi nella differenza $x - \sin(x)$ si perdono cifre significative. Possiamo renderla stabile usando gli sviluppi:

$$f(x) = x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\approx \frac{x^3}{6} \quad \text{per } x \to 0$$

che evita la cancellazione.