Tutoraggio Analisi II

a.a. 2012/2013

dott.ssa Saoncella

Lezione del 30/10/2012

Esercizio 1

Risolvere la seguente equazione differenziale a variabili separabili

$$y' = t^3 y^2 \qquad (*)$$

e ricavarne il ritratto di fase.

Soluzione

Osserviamo che $y=0$ è soluzione, infatti se sostituiamo y in $(*)$ troviamo $0=0$. (la derivata della funzione costante è nulla).
Supponiamo $y \neq 0$ e separando le variabili troviamo:

$$\frac{dy}{y^2} = t^3 dt$$

passando agli integrali si ha

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int t^3 dt$$

quindi risolvendo separatamente i due integrali si ottiene

$$-\frac{1}{y} = \frac{t^4}{4} + c_1 \qquad \text{con } c_1 \in \mathbb{R}$$

da cui si ha che

$$y = -\frac{4}{t^4 + 4c_1} = -\frac{4}{t^4 + \tilde{c}_1} \qquad \text{con } \tilde{c}_1 \in \mathbb{R}.$$

Ricaviamo ora il ritratto di fase.

Abbiamo due casi in base al valore della costante $\tilde{c}$.

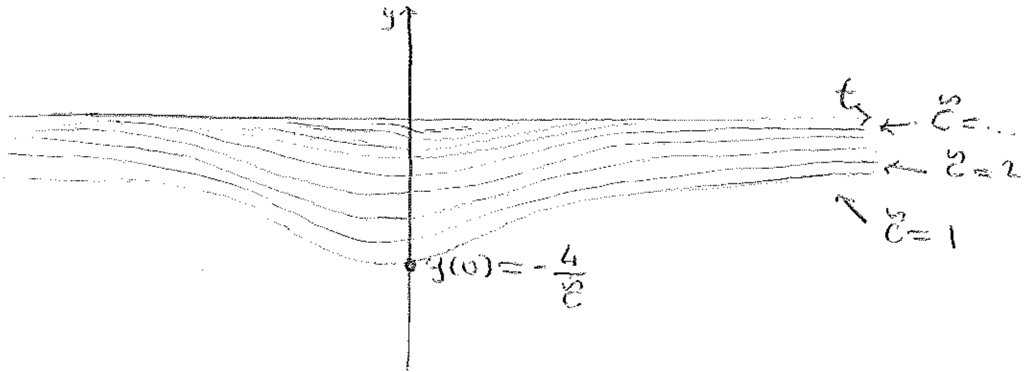
- Se $\tilde{c} > 0$,

il denominatore non è mai nullo e le soluzioni $y(t)$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$. Si ha che il $\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = 0$.

Inoltre abbiamo che le soluzioni $y(t)$ sono sempre negative.

Per quanto riguarda la derivata, quest'ultima si annulla per $t=0$ (lo si vede da $*$) mentre $y' \neq 0$ $\forall t$ in quanto le soluzioni sono sempre negative. Per $t=0$ si ha un punto di minimo assoluto.

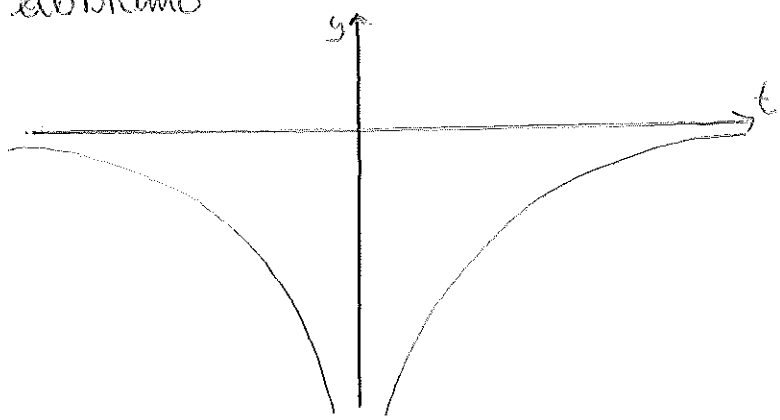
Quindi abbiamo



- Se $\tilde{c} = 0$,

Si ha che le soluzioni $y(t)$ sono sempre negative. Il $\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = 0$ mentre il $\lim_{t \to 0} y(t) = -\infty$.

Quindi abbiamo

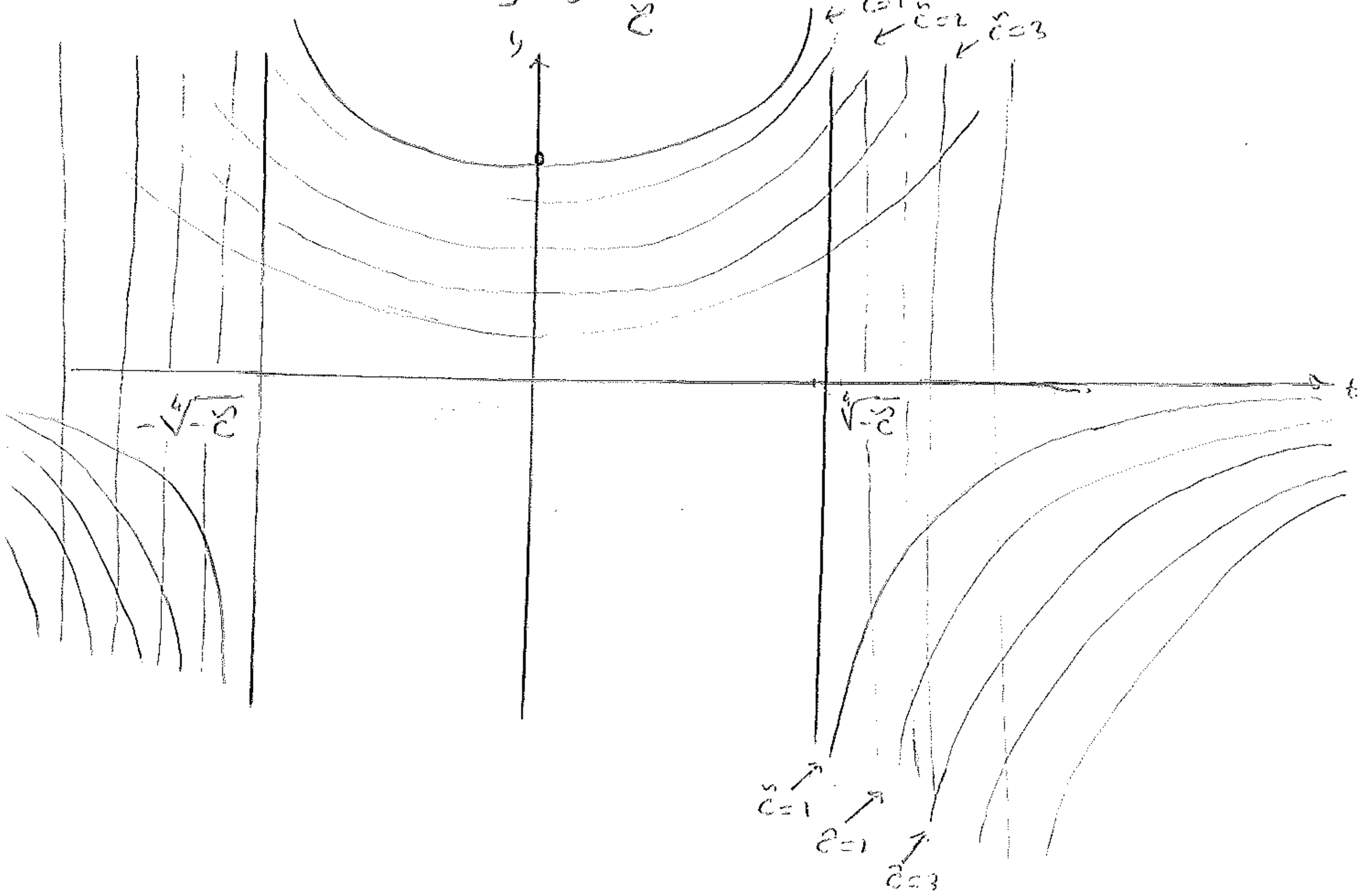


- Se $\tilde{c} < 0$,

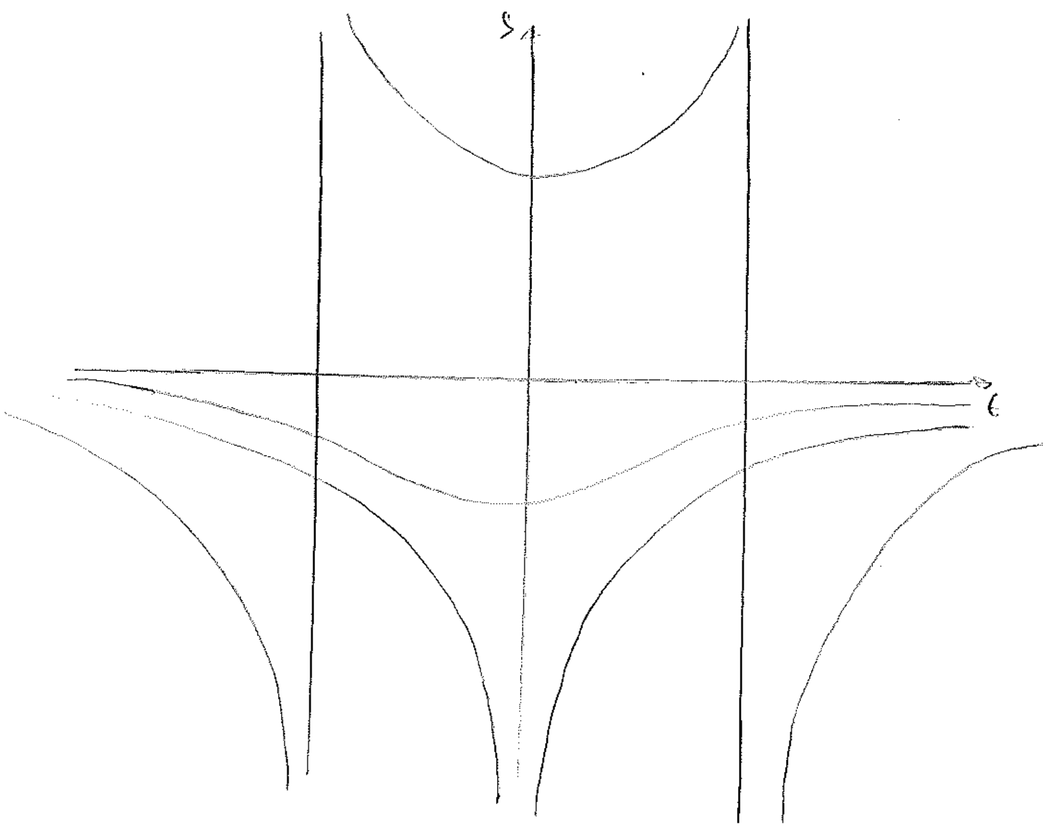
il denominatore si annulla per $t = \pm\sqrt[4]{-\tilde{c}}$ (abbiamo due asintoti) e abbiamo che

$\lim_{t \to -\sqrt[4]{-\tilde{c}}^-} y(t) = -\infty$, $\lim_{t \to -\sqrt[4]{-\tilde{c}}^+} y(t) = +\infty$, $\lim_{t \to \sqrt[4]{-\tilde{c}}^-} y(t) = +\infty$, $\lim_{t \to \sqrt[4]{-\tilde{c}}^+} y(t) = -\infty$

Inoltre abbiamo che $y(0)=\frac{4}{\tilde{c}}$. Quindi



Mettendo assieme tutti e tre i casi



ESERCIZIO 2

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^3 t^2 & (*) \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO

Per $y=0$ si ha una soluzione particolare infatti sostituendo $y=0$ in $(*)$ si ottiene $0=0$.

Supponiamo $y \neq 0$ e separando le variabili abbiamo

$$\frac{dy}{y^3} = t^3 dt$$

integrando ambo i membri otteniamo

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int t^2 dt \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{3} t^3 + 2c' \quad \text{con } c' \in \mathbb{R}$$

quindi

$$\frac{1}{y^2} = -\frac{2}{3} t^3 + c' \Rightarrow y^2 = \frac{1}{-\frac{2}{3} t^3 + 2c'} = \frac{3}{-2t^3 + \tilde{c}} \quad \text{con } \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

infine si ha

$$y = \pm \sqrt{\frac{3}{-2t^3 + \tilde{c}}} \quad (**)$$

dove la soluzione esiste per $t < \sqrt{\tilde{c}/2}$ con $\tilde{c} \in \mathbb{R}$.

Possiamo ora considerare la condizione iniziale $y(0)=5$ che ci servirà per determinare il valore della costante $\tilde{c}$.

La condizione iniziale ci dice al tempo $t=0$, la funzione è positiva.

Quindi per determinare $\tilde{c}$ dobbiamo scegliere la soluzione con il $+$ in $(**)$.

Quindi

$$5 = u(0) = +\sqrt{\frac{3}{\tilde{c}}} \Rightarrow 25 = \frac{3}{\tilde{c}} \Rightarrow \tilde{c} = \frac{3}{25}$$

la soluzione cercata è

$$u(t) = \sqrt{\frac{3}{-2t^3 + 3/25}} = \sqrt{\frac{75}{3 - 50t^3}}$$

Esercizio 3

Determinare l'integrale generale di

$$y' = \frac{xy}{1+x^2} \quad (*)$$

Si tratta di un equazione diff. a variabili separabili.
Se $y=0$, abbiamo una soluzione particolare.
Supponiamo $y \neq 0$ e separando le variabili otteniamo

$$\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

integrando ambo i membri

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

e risolvendo si ottiene

$$\log|y| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\, d(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c' \qquad \text{con } c' \in \mathbb{R}$$

Passando agli esponenziali

$$y = \pm e^{[1/2 \log(1+x^2) + c']} \overset{c_1 = e^{c'} > 0}{=} \pm c_1 e^{1/2 \log(1+x^2)} \overset{c_2 = \pm c_1 \in \mathbb{R}}{=} c_2\sqrt{1+x^2}$$

Per verificare che la soluzione è corretta basta sostituirla in $(*)$ e verificare l'uguaglianza. Quindi

$$y' = \pm e^{[1/2 \log(1+x^2) + c']} \cdot \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{xy}{1+x^2} \quad \text{ok}$$

ESERCIZIO 4

Risolvere la seguente eq. diff. non omogenea

$$y' + y \sin x = \sin 2x$$

(si veda l'esercizio 3 della lezione del 06/10/2011)

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente propblema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2xy^2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

(si veda l'esercizio 2 della lezione del 06/10/2011)

ESERCIZIO 6

Risolvere la seguente eq. diff. non omogenea

$$y' + y \cot g x - 2\cos x = 0$$

(si veda l'esercizio 4 della lezione del 06/10/2011)

ESERCIZIO 7

Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' = x(1+y^2) \quad (*)$$

SVOLGIMENTO

Si tratta di un equazione differenziale a variabili separabili del 1° ordine. Riscriviamo (*) nel seguente modo

$$\frac{dy}{dx} = x(1+y^2)$$

Separando le variabili e dividendo per $(1+y^2)$ si ottiene

$$\frac{dy}{1+y^2} = x\,dx$$

andando ad integrare ambo i membri

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int x\, dx$$

risolvendo si ottiene

$$\arctan(y) = \frac{x^2}{2} + c_1' \qquad \text{con} \quad c_1' \in \mathbb{R}.$$

quindi

$$y = tg\left(\frac{x^2}{2} + c_1'\right) \qquad \text{dove} \quad c_1' \in \mathbb{R}.$$

Per verificare che la soluzione trovata è corretta, basta derivare y.
Quindi

$$y' = \left[1 + tg^2\left(\frac{x^2}{2} + c_1'\right)\right] \cdot \frac{2x}{2} = (1+y^2)x.$$

Esercizio 8

Risolvere $y' = y^{2/3}$ e determinare le curve integrali su $(1,0)$.

Svolgimento

Se $y=0$, abbiamo una soluzione di $y' = y^{2/3}$.
Supponiamo pertanto $y \neq 0$ e separando le variabili, si ottiene

$$y^{-2/3} dy = dx \qquad (*)$$

integrando ambo i membri, otteniamo

$$\int y^{-2/3} dy = \int dx$$

quindi

$$3y^{1/3} = x + c_1' \qquad \Rightarrow \qquad y^{1/3} = \frac{x + c_1'}{3} \qquad c_1' \in \mathbb{R}$$

ossia l'integrale generale

$$y = \left(\frac{x + c_1'}{3}\right)^3 \qquad c_1' \in \mathbb{R} \qquad (**)$$

Verifichiamo che la soluzione è corretta

$$y' = 3\left(\frac{x+c'}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = y^{2/3}$$

Passiamo ora alle curve integrali su (1,0).
Esistono due integrali generali di (*) che soddisfano la condizione iniziale $y(1)=0$:

- l'integrale $y=0$
- l'integrale particolare che si ottiene da (**) ponendo $c=-1$.

Infatti si ha

$$0 = \left(\frac{1+c_1'}{3}\right)^3 \Rightarrow c_1' = -1$$

e dunque abbiamo che

$$y = \left(\frac{x-1}{3}\right)^3$$