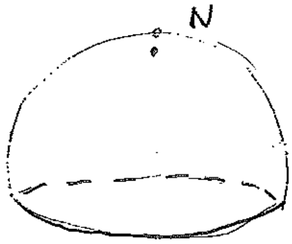
TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE — Prof. M. Spera, a.a. 2009/10

Lezione XXXIX

Calcolo di $H^*(S^n)$: induzione su n

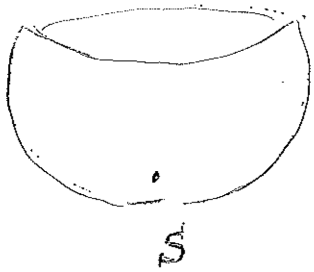
si parte da $H^*(S^1)$...

$U =$



più grande di un emisfero

$V =$

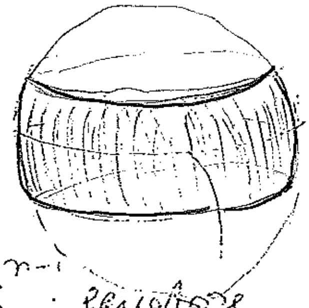


in generale (inv. omotopica della coomologia di de-Rham)

$$H^*(M \times \mathbb{R}) \cong H^*(M)$$

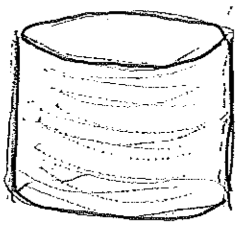
[è una conseguenza del lemma di Poincaré]

$U \cap V =$



$\approx S^{n-1} \times \mathbb{R}$

diffeo



S^{n-1} : equatore generalizzato

$U \cup V = S^n$ $\qquad n>1$

	S^n $U \cup V$		$U \sqcup V$		$S^{n-1} \times \mathbb{R}$ $U \cap V$	
H^0	$\mathbb{R}$	$\to$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\to$	$\mathbb{R}$	d^*
H^1	0	$\to$	0		0	
$\vdots$						
H^{n-1}	0	$\to$	0	$\to$	$\mathbb{R}$	ip. induttiva
H^n	$\mathbb{R}$		0			

$0 \to \ ? \to 0 \to 0$

$\Rightarrow \ ? \underset{\text{iso}}{\cong} 0$

Coomologia del toro

$$H^*(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & 0 \\ \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} = \mathbb{R}^2 & 1 \\ \mathbb{R} & 2 \end{cases}$$

$$\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$$

(Künneth $\quad H^*(S^1\times S^1) = H^*(S^1)\otimes H^*(S^1)$

$$H^1(\mathbb{T}^2) = \underbrace{H^1(S^1)}_{\mathbb{R}}\otimes\underbrace{H^0(S^1)}_{\mathbb{R}} \oplus H^0(S^1)\otimes H^1(S^1)$$

$$\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$= \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$$

$$H^p(M\times N) \cong \bigoplus_{i=0}^{p} H^i(M)\otimes H^{p-i}(N)$$)

in generale

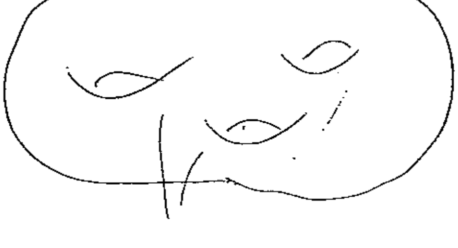
$$\boxed{H^k(\mathbb{T}^n) = \binom{n}{k}}$$

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{S^1\times S^1\times\ldots S^1}_{n}$$

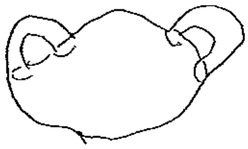
È facile individuare rappresentanti espliciti (esercizio)

Teorema $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$

superficie chiusa, orientabile



g



Sfera con g manici

app.

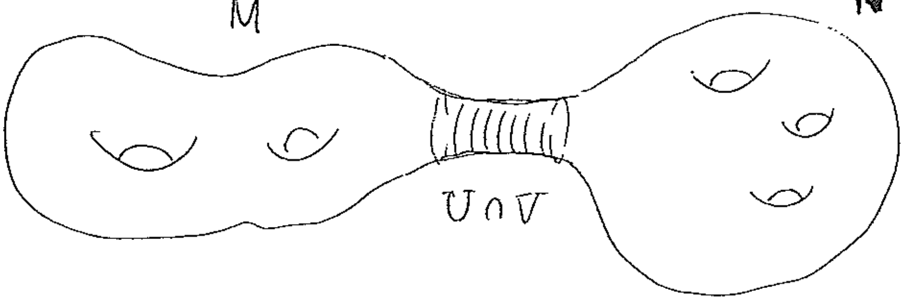
somma connessa di g tori

Dimostrazione

* Partiamo da $\chi(\Sigma_0) = 2$ sfera, $\chi(\Sigma_1) = 0$ toro

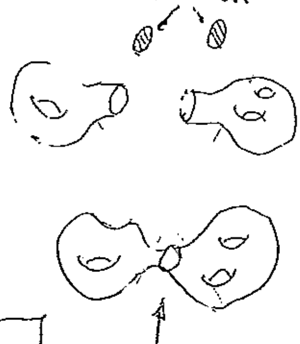
Consideriamo due varietà lisce, compatte, senza bordo (.. chiuse) M, N, e la loro* somma connessa $M \# N$

M N



$\bar{U} \cap \bar{V}$

rimossi



"incollare"

$\bar{U}$

Sia $\bar{U} = M \setminus \{pt\}$

$\bar{V} = N \setminus \{pt\}$

$\bar{U} \cap \bar{V} \approx S^1 \times \mathbb{R}$ (cilindro)

(diffeom)

$M \# N \approx U \cup \bar{V}$

Si consideri la successione di Mayer – Vietoris (esatta lunga)

$$0 \to H^0(M\#N) \to H^0(U) \oplus H^0(\bar V) \to H^0(\bar U \cap \bar V) \to$$

$$(\ldots \bar U \cup \bar V)$$

$$\to H^1(M\#N) \to H^1(\bar U) \oplus H^1(\bar V) \to H^1(\bar U \cap \bar V) \to$$

$$\to H^2(M\#N) \to H^2(\bar U) \oplus H^2(\bar V) \to H^2(\bar U \cap \bar V) \to$$

$$\to 0$$

Ora: è $h^0(\bar U \cap \bar V) = 1 = h^1(\bar U \cap \bar V)$

$$h^2(\bar U \cap \bar V) = 0$$

Da ciò si ottiene subito (si ricordi che $\Sigma(-1)^i a^i = 0$ in virtù dell'esattezza)

$$\boxed{\chi(M\#N) = \chi(\bar U) + \chi(\bar V)}$$

Sia $N = S^2$. Allora $\bar V \approx \mathbb{R}^2 \Rightarrow \chi(\bar V) = 1$

Ma $M \# S^2 \approx M \Rightarrow$

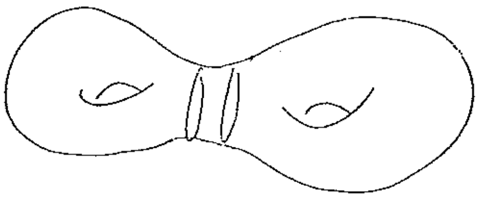
$$\chi(M) = \chi(\bar U) + 1 \Rightarrow \begin{cases} \chi(\bar U) = \chi(M) - 1 \\ \chi(\bar V) = \chi(N) - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2}$$

ora $\quad \Sigma_g = \underbrace{\Sigma_1 \# \Sigma_1 \# \dots \Sigma_1}_{g \text{ copie}} \quad g \geq 1$

Σ_1: toro

Σ_0 : sfera



$\Rightarrow$ si ottiene facilmente, per induzione

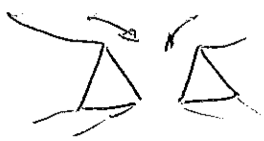
$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

Si ha, ovviamente $\quad h^0(\Sigma_g) = 1, \; h^1(\Sigma_g) = 2g$

$h^2(\Sigma_g) = 1$

base di 1-cicli in omologia singolare

Nota. La formula $\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$ è immediata in termini di triangolazioni: nella giunzione si "perdono" due facce, tre vertici, tre spigoli, ma questi ultimi vanno contati con segni discordi, da cui l'asserto.



Se M è una varietà connessa, orientabile, compatta, senza bordo ($\partial M = \phi$)

$$H^n(M) \cong \mathbb{R} \qquad (\text{ex: Dualità di Poincaré} + H^0(M) \cong 0)$$

come rappresentante di un gen. della coomologia possiamo prendere una forma di volume (i.e. n-forma mai nulla) ω: quest'ultima è infatti chiusa ma non esatta:

innanzitutto:

$$+\infty > \int_M \omega > 0 \qquad (\text{"volume di } M\text{"})$$

compattezza di M

Ma, se $\omega = d\alpha$, si avrebbe

pure

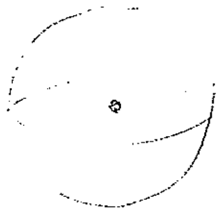
$$\int_M \omega = \int_M d\alpha \underset{(\text{Stokes})}{=} \int_{\underset{\phi}{\partial M}} \alpha = 0 \text{ . Contraddizione.}$$

4 $\quad H^*(\mathbb{R}^3-\{0\})$ $\quad$ (il teorema di Gauss)

(è connesso)

vedi anche le lezioni iniziali

$$\boxed{H^*(\mathbb{R}^3-\{0\}) = H^*(S^2)}$$

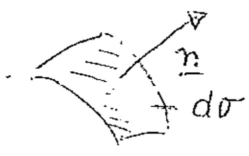


$$H^0(S^2) = \mathbb{R}$$
$$H^1(S^2) = 0 \qquad \text{(es sulla Hurewicz..)}$$
$$H^2(S^2) = \mathbb{R}$$

ω = "elemento di flusso del campo elettrico generato da una carica q posta nell'origine" :

$$\underline{E} = q\,\frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|^3} = q\,\frac{\underline{r}}{r^3}$$

$$\underline{E}\cdot\underline{n}\,d\sigma = q\,\frac{x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



areola orientata

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\|\quad\|}$$

$$d\sigma = \|\quad\|\,du\,dv$$

$$\underline{n}\,d\sigma = (\underline{r}_u \times \underline{r}_v)\,du\,dv$$

$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) du\,dv$$

$\left[\, dx\wedge dy = \text{(formalmente)}\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv \ \text{etc} \,\right]$

Nota:

$$dx \wedge dy \wedge dz = d\,(\underbrace{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}_{\omega})$$

e $\qquad \omega\big|_{S^2} =$ forma di volume di S^2 (area)

Ciò si generalizza:

$$\omega_{S^n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k \, dx_0 \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_k} \wedge \ldots dx_n$$

forma di volume su S^n standard

$(x_0 \ldots x_n)$ coord in $\mathbb{R}^{n+1}$

ricordate? le abbiamo utilizzate nella dim del lemma di Poincaré

$\star$ Non esiste nessuna struttura simplettica su S^4

(M, ω) varietà simplettica $\quad \omega$ chiusa ($d\omega = 0$)

$\dim M = 2n$ $\quad$ 2-forma non degenere

osserviamo che $\quad \omega^n := \underbrace{\omega \wedge .. \ \omega}_{n}$ $\quad$ è una forma di volume su M.

Es: in $\mathbb{R}^4$ $\quad \omega = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$

$\omega \wedge \omega = \ldots = 2\, dq_1 \wedge dp_1 \wedge dq_2 \wedge dp_2$

Se ω fosse una f. simplettica su S^4, si avrebbe

$$[\omega] = 0 \qquad (H^2(S^4) \cong 0)$$

i.e. $\quad \omega = d\alpha$. $\quad$ Pertanto

$$\omega \wedge \omega = d\alpha \wedge \omega = d(\alpha \wedge \omega) + \alpha \, d\omega$$

(notare: $\overset{1}{\alpha}$, $\overset{2}{\omega}$, $d\omega = 0$)

$$= d(\alpha \wedge \omega)$$

ma una forma di volume su una var. compatta or. non può essere esatta!

Sicché $\quad 0 < \int_{S^4} \omega \wedge \omega = \int_{S^4} d(\alpha \wedge \omega) = \int_{\partial S^4} \alpha \wedge \omega = 0$

$\partial S^4 = \emptyset$ come var. $\quad \partial S^4 = 0$ come catena

(v. anche esempio precedente)