# Matematica e Statistica

## Prova d'esame (10/07/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

# Matematica e Statistica

## Prova di $\boxed{\text{MATEMATICA}}$ (10/07/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ________________

IN STAMPATELLO VR · · · · · ·

**** Svolgere prima i punti* (a) *di <u>tutti</u> gli esercizi; solo in seguito i punti* (b). ***** **▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶**

(1) (a) Nello spazio tridimensionale la retta $r$ passa per $A(0,1,-1)$ e $B(-1,2,0)$, mentre il piano $\Pi$ contiene $r$ e passa per $C(1,1,1)$. Determinare entrambi in forma parametrica e cartesiana.

(b) Determinare il luogo dei punti del piano $x=0$ che hanno uguale distanza dal punto $A$ e dall'asse $z$. Di che luogo si tratta (circonferenza, retta, iperbole, ...)?

(2) Studiare (giustificando le conclusioni) la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{e^x+1}}{x}$ , e tracciarne il grafico.[1]

(3) (a) Calcolare gli integrali $\displaystyle\int_0^1 (3-e^{\sqrt{x}})\,dx$ e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2-\sin^2 x}\,dx$.

(b) Disegnare $S = \left\{(x,y) : |x| \le \frac{\pi}{2},\ |x-1|-1 \le y \le x\cos x\right\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Data $g(x,y) = x - 2\sqrt{xy+2}$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali.

(b) Calcolare gli estremi assoluti di $g$ sull'insieme $\mathcal{Q} = \{(x,y) : |x| \le 1,\ |y-1| \le 1\}$.

(5) Sono date le equazioni differenziali $e^{2x}\,yy' = 3(e^x-3)$ e $y''-y+1=0$.

(a) Trovare le soluzioni di ciascuna delle due equazioni, specificando se ve ne sono in comune.

(b) Quali delle soluzioni trovate ammettono un punto di massimo locale stretto in $x=0$?

[1] Per lo studio della crescenza potrebbe essere utile un confronto grafico. Non è richiesta la convessità.

# Matematica e Statistica

Prova di **STATISTICA** (10/07/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Cognome-Nome ____________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO VR ······

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! **** **▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶**

**Esercizio 1)**

Un medico di base vuole monitorare il numero di pazienti che giornalmente visitano il suo sudio. Pertanto per i mesi estivi ottiene (considerando i soli giorni lavorativi) le seguenti osservazioni

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 13 | 13 | 10 | 9 | 9 | 9 | 8 | 12 |
| 12 | 10 | 11 | 7 | 11 | 10 | 7 | 10 | 10 | 11 |
| 10 | 8 | 7 | 13 | 11 | 9 | 10 | 8 | 7 | 10 |
| 9 | 15 | 14 | 14 | 9 | 10 | 7 | 8 | 7 | 9 |
| 13 | 6 | 9 | 13 | 9 | 10 | 10 | 8 | 7 | 18 |
| 8 | 16 | 9 | 7 | 9 | 11 | 8 | 10 | 12 | 8 |

Il candidato

a) Determini la tipologia del carattere.
b) Descriva e calcoli un indice di posizione adeguato ai dati.
c) Descriva e calcoli un indice di variabilità adeguato ai dati.
d) Fornisca una rappresentazione grafica dei dati.

**Esercizio 2)**

Il candidato usi le osservazioni presentate nell'esercizio precedente per stimare puntualmente e per intervallo il valore atteso del numero di visite in un giorno estivo. Il candidato indichi le ipotesi necessarie e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.

**Esercizio 3)**

Lo stesso medico di base ha ripetuto le osservazioni nei tre mesi invernali ottenendo osservazioni raccolte per classe ripostate nella tabella sottostante

| Numero di pazienti per giorno | meno di 9 | Fra 9 e 11 | Fra 12 e 14 | più di 14 |
|---|---|---|---|---|
| Numero di giorni in cui è successo | 13 | 23 | 15 | 9 |

Il candidato

a) raccolga i dati relativi alle ossevazioni estive ed invernali in una tabella a doppia entrata;
b) descriva il tipo di carattere della bivariata ottenuta;
c) se possibile calcoli un indice sintetico di posizione per la bivariata ottenuta;
d) il candidato stabilista se esite una qualche dipedenza fra i due caratteri componenti la bivariata. il candidato indichi le ipotesi necessarie per eseguire il test e proceda al calcolo anche qualora queste non siano soddisfatte.

**Esercizio 4)**

Si considerino i seguenti eventi dichiarati indipendenti.

$E_1$ : si ottenga $x \geq 0$ dove $x$ è estratto da una v. c. distribuita come una normale standardizzata.
$E_2$: si ottenga y>1 dove $y$ è estratto da una v. c. *Unif(-4;6).*

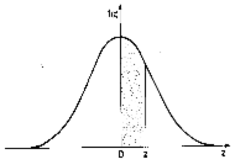
a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità sapendo che la probabilità che i due eventi si verifichino contemporaneamente è pari al 10%:

$$P(E_1);\ P(E_2);\ P(E_1\ U\ E_2)\ P(E_1 \mid E_2).$$

b) Il candidato verfichi se gli eventi sono statisticamente dipendenti.

Tavola I

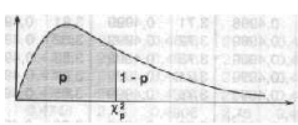
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6 | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8 | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9 | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| 3.0 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.




| ν \ p | 0,005 | 0,01 | 0,025 | 0,05 | 0,10 | 0,25 | 0,50 | 0,75 | 0,90 | 0,95 | 0,975 | 0,99 | 0,995 | 0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0010 | 0,0039 | 0,0158 | 0,102 | 0,455 | 1,32 | 2,71 | 3,84 | 5,02 | 6,63 | 7,88 | 10,8 |
| 2 | 0,0100 | 0,0201 | 0,0506 | 0,103 | 0,211 | 0,575 | 1,39 | 2,77 | 4,61 | 5,99 | 7,38 | 9,21 | 10,6 | 13,8 |
| 3 | 0,0717 | 0,115 | 0,216 | 0,352 | 0,584 | 1,21 | 2,37 | 4,11 | 6,25 | 7,81 | 9,35 | 11,3 | 12,8 | 16,3 |
| 4 | 0,207 | 0,297 | 0,484 | 0,711 | 1,06 | 1,92 | 3,36 | 5,39 | 7,78 | 9,49 | 11,1 | 13,3 | 14,9 | 18,5 |
| 5 | 0,412 | 0,554 | 0,831 | 1,15 | 1,61 | 2,67 | 4,35 | 6,63 | 9,24 | 11,1 | 12,8 | 15,1 | 16,7 | 20,5 |
| 6 | 0,676 | 0,872 | 1,24 | 1,64 | 2,20 | 3,45 | 5,35 | 7,84 | 10,6 | 12,6 | 14,4 | 16,8 | 18,5 | 22,5 |
| 7 | 0,989 | 1,24 | 1,69 | 2,17 | 2,83 | 4,25 | 6,35 | 9,04 | 12,0 | 14,1 | 16,0 | 18,5 | 20,3 | 24,3 |
| 8 | 1,34 | 1,65 | 2,18 | 2,73 | 3,49 | 5,07 | 7,34 | 10,2 | 13,4 | 15,5 | 17,5 | 20,1 | 22,0 | 26,1 |
| 9 | 1,73 | 2,09 | 2,70 | 3,33 | 4,17 | 5,90 | 8,34 | 11,4 | 14,7 | 16,9 | 19,0 | 21,7 | 23,6 | 27,9 |
| 10 | 2,16 | 2,56 | 3,25 | 3,94 | 4,87 | 6,74 | 9,34 | 12,5 | 16,0 | 18,3 | 20,5 | 23,2 | 25,2 | 29,6 |
| 11 | 2,60 | 3,05 | 3,82 | 4,57 | 5,58 | 7,58 | 10,3 | 13,7 | 17,3 | 19,7 | 21,9 | 24,7 | 26,8 | 31,3 |
| 12 | 3,07 | 3,57 | 4,40 | 5,23 | 6,30 | 8,44 | 11,3 | 14,8 | 18,5 | 21,0 | 23,3 | 26,2 | 28,3 | 32,9 |
| 13 | 3,57 | 4,11 | 5,01 | 5,89 | 7,04 | 9,30 | 12,3 | 16,0 | 19,8 | 22,4 | 24,7 | 27,7 | 29,8 | 34,5 |
| 14 | 4,07 | 4,66 | 5,63 | 6,57 | 7,79 | 10,2 | 13,3 | 17,1 | 21,1 | 23,7 | 26,1 | 29,1 | 31,3 | 36,1 |
| 15 | 4,60 | 5,23 | 6,26 | 7,26 | 8,55 | 11,0 | 14,3 | 18,2 | 22,3 | 25,0 | 27,5 | 30,6 | 32,8 | 37,7 |
| 16 | 5,14 | 5,81 | 6,91 | 7,96 | 9,31 | 11,9 | 15,3 | 19,4 | 23,5 | 26,3 | 28,8 | 32,0 | 34,3 | 39,3 |
| 17 | 5,70 | 6,41 | 7,56 | 8,67 | 10,1 | 12,8 | 16,3 | 20,5 | 24,8 | 27,6 | 30,2 | 33,4 | 35,7 | 40,8 |
| 18 | 6,26 | 7,01 | 8,23 | 9,39 | 10,9 | 13,7 | 17,3 | 21,6 | 26,0 | 28,9 | 31,5 | 34,8 | 37,2 | 42,3 |
| 19 | 6,84 | 7,63 | 8,91 | 10,1 | 11,7 | 14,6 | 18,3 | 22,7 | 27,2 | 30,1 | 32,9 | 36,2 | 38,6 | 43,8 |
| 20 | 7,43 | 8,26 | 9,59 | 10,9 | 12,4 | 15,5 | 19,3 | 23,8 | 28,4 | 31,4 | 34,2 | 37,6 | 40,0 | 45,3 |
| 21 | 8,03 | 8,90 | 10,3 | 11,6 | 13,2 | 16,3 | 20,3 | 24,9 | 29,6 | 32,7 | 35,5 | 38,9 | 41,4 | 46,8 |
| 22 | 8,64 | 9,54 | 11,0 | 12,3 | 14,0 | 17,2 | 21,3 | 26,0 | 30,8 | 33,9 | 36,8 | 40,3 | 42,8 | 48,3 |
| 23 | 9,26 | 10,2 | 11,7 | 13,1 | 14,8 | 18,1 | 22,3 | 27,1 | 32,0 | 35,2 | 38,1 | 41,6 | 44,2 | 49,7 |
| 24 | 9,89 | 10,9 | 12,4 | 13,8 | 15,7 | 19,0 | 23,3 | 28,2 | 33,2 | 36,4 | 39,4 | 43,0 | 45,6 | 51,2 |
| 25 | 10,5 | 11,5 | 13,1 | 14,6 | 16,5 | 19,9 | 24,3 | 29,3 | 34,4 | 37,7 | 40,6 | 44,3 | 46,9 | 52,6 |
| 26 | 11,2 | 12,2 | 13,8 | 15,4 | 17,3 | 20,8 | 25,3 | 30,4 | 35,6 | 38,9 | 41,9 | 45,6 | 48,3 | 54,1 |
| 27 | 11,8 | 12,9 | 14,6 | 16,2 | 18,1 | 21,7 | 26,3 | 31,5 | 36,7 | 40,1 | 43,2 | 47,0 | 49,6 | 55,5 |
| 28 | 12,5 | 13,6 | 15,3 | 16,9 | 18,9 | 22,7 | 27,3 | 32,6 | 37,9 | 41,3 | 44,5 | 48,3 | 51,0 | 56,9 |
| 29 | 13,1 | 14,3 | 16,0 | 17,7 | 19,8 | 23,6 | 28,3 | 33,7 | 39,1 | 42,6 | 45,7 | 49,6 | 52,3 | 58,3 |
| 30 | 13,8 | 15,0 | 16,8 | 18,5 | 20,6 | 24,5 | 29,3 | 34,8 | 40,3 | 43,8 | 47,0 | 50,9 | 53,7 | 59,7 |

## Soluzioni

### MATEMATICA

**(1)** (a) La retta $r$, passando per i punti $A(0,1,-1)$ e $B(-1,2,0)$, sarà parallela al vettore $\vec{v}=(0,1,-1)-(-1,2,0)=(1,-1,-1)$ e dunque una forma parametrica è $r=\{(0,1,-1)+t(1,-1,-1): t\in\mathbb{R}\}=\{(t,1-t,-1-t): t\in\mathbb{R}\}$. Sostituendo $x=t$ in $(y,z)=(1-t,-1-t)$ si ricava poi una forma cartesiana dal sistema delle due equazioni $x+y=1$ e $x+z=-1$. • Il piano $\Pi$, contenendo la retta $r$, sarà parallelo al vettore $\vec{v}$ e passerà per il punto $A$ oltre che per $C(1,1,1)$: due vettori ad esso paralleli saranno pertanto $\vec{v}$ e $\vec{w}=(1,1,1)-(0,1,-1)=(1,0,2)$, da cui la forma parametrica $\Pi=\{(1,1,1)+s(1,-1,-1)+t(1,0,2): s,t\in\mathbb{R}\}=\{(1+s+t,1-s,1-s+2t): s,t\in\mathbb{R}\}$; da $(x,y)=(1+s+t,1-s)$ si ricava poi $(s,t)=(1-y,x+y-2)$, che messe in $z=1-s+2t$ danno l'equazione cartesiana $2x+3y-z-4=0$.

(b) Un punto del piano $x=0$ è del tipo $(0,y,z)$, e la condizione di avere uguale distanza dal punto $A(0,1,-1)$ e dall'asse $z$ si esprime imponendo che $\sqrt{(y-1)^2+(z+1)^2}=|y|$, che quadrando equivale a $y^2-2y+1+z^2+2z+1=y^2$, ovvero $y=\frac{1}{2}z^2+z+1$: si tratta come noto di una parabola (con asse $z=-1$ e vertice $(\frac{1}{2},-1)$).

**(2)** (Figura 1) Poiché $e^x+1>0$, la funzione $f(x)=\frac{\sqrt{e^x+1}}{x}$ è definita per $x\neq 0$, e nel dominio è derivabile infinite volte. La funzione non si annulla mai, e vale $f(x)\geq 0$ per $x\geq 0$. I limiti interessanti sono in $\mp\infty$ e in $0^{\mp}$: quelli determinati sono $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0^-$ e $\lim_{x\to 0^{\mp}} f(x)=\mp\infty$, mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è in forma determinata ma si vede facilmente (con de l'Hôpital, o raccogliendo $e^x$ sopra e $x$ sotto) che vale $+\infty$: dunque $x=0$ è asintoto verticali bilateri, $y=0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$, ed essendo $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{e^x+1}}{x^2}=+\infty$ (stessa dimostrazione di prima) non c'è asintoto obliquo a $+\infty$. Derivando si ottiene $f'(x)=\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}x-\sqrt{e^x+1}}{x^2}=\frac{xe^x-2(e^x+1)}{2x^2\sqrt{e^x+1}}=\frac{(x-2)e^x-2}{2x^2\sqrt{e^x+1}}$, dunque vale $f'(x)\geq 0$ dove $(x-2)e^x\geq 2$, ovvero (dividendo per $e^x>0$) dove $x-2\geq 2e^{-x}$, e un confronto grafico tra $y=x-2$ (retta) e $y=2e^{-x}$ (esponenziale simmetrizzato e raddoppiato di valore) mostra chiaramente che ciò accade quando $x\geq a$ per un certo $2<a<3$ (vale in realtà $a\sim 2{,}2$): dunque$f$ è strettamente decrescente su $]-\infty,0[$ e su $]0,a[$ e strettamente crescente su $]a,+\infty[$, dunque $x=a$ è punto di minimo locale (con $f(a)\sim 1{,}4$).

**(3)** (a) Posto $x=t^2$ (da cui $dx=2t\,dt$), separando gli addendi e integrando per parti si ha $\int_0^1(3-e^{\sqrt{x}})\,dx=\int_0^1 3\,dx-\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx=(3x]_0^1-2\int_0^1 t\,e^t\,dt=3-2((t-1)e^t]_0^1=3-2((0)-(-1))=1$. • Posto $u=\sin x$ (da cui $du=\cos x\,dx$) vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2-\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{2-\sin^2 x}\,dx=\int_0^1\frac{2u}{2-u^2}\,du=(-\log(2-u^2)]_0^1=\log 2\sim 0{,}7$.

(b) (Figura 2) La funzione $x\cos x$ è dispari, positiva per $x>0$ e si annulla in $x=-\frac{\pi}{2}$, $0$, $\frac{\pi}{2}$, mentre la funzione $|x-1|-1$ ha come grafico quello del modulo traslato a destra di 1 e in basso di 1: l'area di $S$ ne risulta $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^1(x-2)\,dx+\int_1^0(-x)\,dx=(x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx+(\frac{1}{2}x^2-2x]_{\frac{\pi}{2}}^1+(-\frac{1}{2}x^2]_1^0=(\frac{\pi}{2})-(0)+(\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}+(-\frac{3}{2})-(\frac{\pi^2}{8}-\pi)+(0)-(-\frac{1}{2})=\frac{3\pi}{2}-2-\frac{\pi^2}{8}$ (che vale circa 1,48).

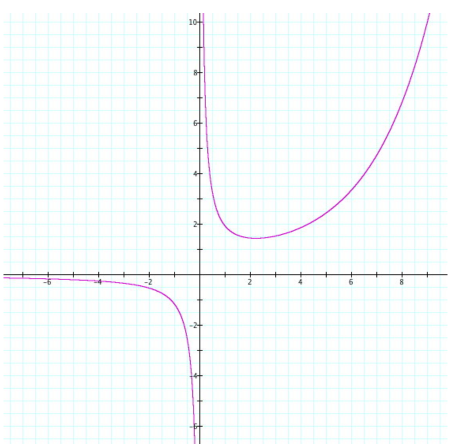
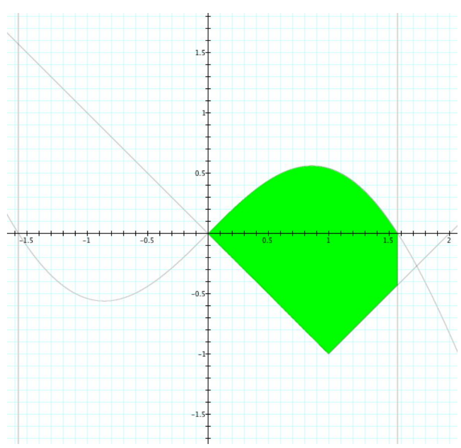
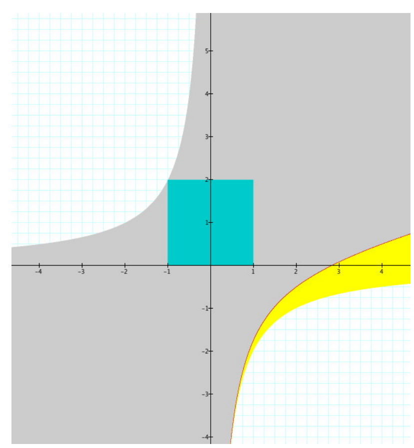
**(4)** (a) (Figura 3) Il dominio di $g(x,y)=x-2\sqrt{xy+2}$ è data da $xy\geq -2$, ovvero tutta la zona compresa tra i due rami (compresi) di iperbole equilatera $xy=-2$ nel 2o e 4o quadrante; si tratta di una funzione continua in tutto il suo dominio e differenziabile in tutto il dominio privato dei rami di iperbole, in quanto in tali punti le derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x}=1-\frac{y}{\sqrt{xy+2}}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{x}{\sqrt{xy+2}}$ risultano continue. La funzione si annulla quando $x=2\sqrt{xy+2}$, che nell'ipotesi $x\geq 0$ equivale a $x^2=4(xy+2)$, ovvero $x^2-4xy-8=0$: si tratta di un'iperbole in posizione generica, che possiamo studiare facilmente ad esempio come grafico di funzione $y=\frac{x^2-8}{4x}$ (asintoto verticale in $0^+$, nulla in $x=2\sqrt{2}$, positiva per $x>2\sqrt{2}$, asintoto obliquo $y=\frac{1}{4}x$ a $+\infty$). Si ha poi $g(x,y)>0$ quando $x>2\sqrt{xy+2}$, che sempre nell'ipotesi $x\geq 0$ equivale a $x^2>4(xy+2)$: per $x=0$ ciò è falso (dunque $g$ è negativa sui punti dell'asse $y$), e per $x>0$ equivale a $y<\frac{x^2-8}{4x}$, ovvero i punti sotto il grafico visto qui sopra. L'unico limite interessante è a $\infty_2$, e non esiste: infatti tendendo a $\infty_2$ lungo la curva degli zeri $y=\frac{x^2-8}{4x}$ tale limite è 0, mentre tendendovi ad esempio lungo l'asse $x$ (ovvero $y=0$) la funzione diventa $g(x,0)=x-2\sqrt{2}$ e dunque il limite è $\pm\infty$. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=0$, ovvero il solo punto $P(0,\sqrt{2})$ da $\frac{\partial g}{\partial y}=0$ si ricava $y=-1$, che messo in $\frac{\partial g}{\partial x}=0$ dà $x=0$, da cui il già noto punto $C(0,-1)$. A conti fatti la matrice hessiana di $g$ risulta $\mathsf{H}_g(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}y^2(xy+2)^{-\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2}(xy+4)(xy+2)^{-\frac{3}{2}}\\ -\frac{1}{2}(xy+4)(xy+2)^{-\frac{3}{2}} & \frac{1}{2}x^2(xy+2)^{-\frac{3}{2}}\end{pmatrix}$; essendo $\mathsf{H}_g(P)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}$ e dunque $\det\mathsf{H}_g(P)<0$, il criterio dell'hessiano ci dice subito che $P$ è un punto di sella.

(b) (Figura 3) L'insieme $\mathcal{Q}=\{(x,y): |x|\leq 1,\ |y-1|\leq 1\}$ è il quadrato chiuso di estremi $A(-1,2)$, $B(1,2)$,

$C(1,0)$ e $D(-1,0)$: per la ricerca degli estremi assoluti di $g$ su $\mathcal{Q}$ (che esistono in base a Weierstrass, essendo $\mathcal{Q}$ un sottoinsieme compatto —ovvero chiuso e limitato— interamente contenuto nel dominio di $g$, che è continua) dividiamo $\mathcal{Q}$ nelle zone $\mathcal{Q}_0$ dei suoi punti interni; $\mathcal{Q}_1$ del lato orizzontale $AB$ privato dei vertici; $\mathcal{Q}_2$ del lato verticale $BC$ privato dei vertici; $\mathcal{Q}_3$ del lato orizzontale $CD$ privato dei vertici; $\mathcal{Q}_4$ del lato verticale $AD$ privato dei vertici; e $\mathcal{Q}_5 = \{A,\, B,\, C,\, D\}$ dei vertici. • Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{Q}_0$, tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per $g$. Ora, come visto prima l'unico è $P(0,\sqrt{2})$, che sta in $\mathcal{Q}_0$ ma che essendo come visto prima una sella, non potrà essere un punto in cui gli estremi vengono raggiunti. • Sul lato orizzontale $\mathcal{Q}_1$ la funzione vale $\varphi_1(x) := g(x,2) = x - 2\sqrt{2(x+1)}$, con $-1 < x < 1$. Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{Q}_1$, in tale punto dovrebbe annullarsi la derivata $\varphi_1'(x) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}$, il che accade quando $x+1 = 2$, non accettabile. • Sul lato verticale $\mathcal{Q}_2$ la funzione vale $\varphi_2(y) := g(1,y) = 1 - 2\sqrt{y+2}$, con $0 < y < 2$; ma la derivata $\varphi_2'(y) = -\frac{1}{\sqrt{y+2}}$ non si annulla mai. La stessa cosa accade sul lato verticale $\mathcal{Q}_4$ (su cui la funzione vale $\varphi_4(y) := g(-1,y) = -1 - 2\sqrt{2-y}$, con $0 < y < 2$ e $\varphi_4'(y) = \frac{1}{\sqrt{2-y}} \neq 0$) e sul lato orizzontale $\mathcal{Q}_3$ (su cui la funzione vale $\varphi_3(x) := g(x,0) = x - 2\sqrt{2}$, con $-1 < x < 1$ e $\varphi_3'(x) = 1 \neq 0$). • Infine, i tre punti $A$, $B$, $C$, $D$ di $\mathcal{Q}_4$ vanno tenuti tutti presenti. • Gli estremi assoluti di $g$ su $\mathcal{Q}$ potranno dunque assunti solo nell'ambito dei quattro vertici $A$, $B$, $C$, $D$: poiché $g(A) = -1$, $g(B) = -3$, $g(C) = 1 - 2\sqrt{2} \sim -1{,}8$ e $g(D) = -1 - 2\sqrt{2} \sim -3{,}8$, il massimo assoluto di $g$ su $\mathcal{Q}$ è $-1$ (assunto in $A$) e il minimo assoluto è $-1 - 2\sqrt{2}$ (assunto in $D$).

**(5)** (a) L'equazione differenziale $e^{2x}\, yy' = 3(e^x - 3)$ è del primo ordine a variabili separabili: separando si ottiene $y\,dy = 3(e^{-x} - 3e^{-2x})\,dx$, da cui integrando $\frac{1}{2}y^2 = -3e^{-x} + \frac{9}{2}e^{-2x} + k$, ovvero (posto $h = 2k$) le soluzioni $y(x) = \mp\sqrt{9e^{-2x} - 6e^{-x} + h}$ al variare di $h \in \mathbb{R}$. • L'equazione $y'' - y + 1 = 0$, ovvero $y'' - y = -1$ è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 - 1 = 0$ ha soluzioni $t = \pm 1$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = A\,e^x + B\,e^{-x}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per la completa è evidentemente la costante $\tilde{y} \equiv 1$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione completa è $y(x) = A\,e^x + B\,e^{-x} + 1$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. • L'unica soluzione in comune tra le due equazioni è $y(x) = 1 - 3e^{-x}$, ottenuta dalla prima per $h = 1$ (col segno $+$) e dalla seconda per $(A, B) = (0, -3)$.

(b) La soluzione generica $y(x) = \mp\sqrt{9e^{-2x} - 6e^{-x} + h}$ della prima equazione è definita in $x = 0$ (come soluzione, dunque con derivabilità) per $(9e^{-2x} - 6e^{-x} + h)\big|_{x=0} > 0$, cioè $h > -3$. In tali casi si ha $y' = \mp\frac{3e^{-x} - 9e^{-2x}}{\sqrt{9e^{-2x} - 6e^{-x} + h}}$, da cui $y'(0) = \pm\frac{6}{\sqrt{3+h}}$, che essendo sempre $\neq 0$ mostra come nessuna di queste soluzioni abbia un punto di massimo locale stretto in $x = 0$. • Passiamo alla soluzione generica $y(x) = A\,e^x + B\,e^{-x} + 1$ della seconda equazione. Da $y' = A\,e^x - B\,e^{-x}$ e $y'' = A\,e^x + B\,e^{-x}$ si ottiene $y'(0) = A - B$ e $y''(0) = A + B$: una condizione necessaria affinché tale soluzione abbia un punto di massimo locale stretto in $x = 0$ è che $y'(0) = 0$ e $y''(0) \leq 0$, ovvero che $B = A \leq 0$; ora, se in più $y''(0) < 0$, ovvero se $B = A < 0$, tale condizione è anche sufficiente, e resta solo da esaminare il caso $A = B = 0$, ovvero la funzione costante 1, per la quale però $x = 0$ non è un punto di massimo locale stretto. Pertanto le soluzioni cercate sono tutte e sole quelle del tipo $y(x) = A(e^x + e^{-x}) + 1$ con $A < 0$.

**1.** Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. (4.b): zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione $g$; il punto stazionario (porpora); l'insieme $\mathcal{Q}$ (azzurro).

STATISTICA

**Esercizio 1)**

a) Determini la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) discreto in quanto le osservazioni possibili sono espresse da numeri naturali.

b) Descriva e calcoli un indice di posizione adeguato ai dati.

Pe questa tipologia di dati è possibile calcolare moda media e mediana. Per i dati in esame si procede al calcolo della media. Utilizzando i dati opportunamente raccolti nella Tabella 1 si ha che

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}=\frac{600}{60}=10$$

c) Descriva e calcoli un indice di variabilità adeguato ai dati.

Avendo scelto la media l'indice di varibilità migliore è la deviazione standard, in quanto presenta la stessa unità di misura della media. Utilizzando i dati della Tabella 1 si ha che

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{N}}=\sqrt{\frac{354}{60}}=5.9$$

d) Fornisca una rappresentazione grafica dei dati.

Una rappresentazone opportuna è data dal diagramma a barre ripostato a lato.


| $x_i$ | $n_i$ | $x_i n_i$ | $x_i-\bar{x}$ | $(x_i-\bar{x})^2$ | $(x_i-\bar{x})^2 n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 6 | -4 | 16 | 16 |
| 7 | 8 | 56 | -3 | 9 | 72 |
| 8 | 8 | 64 | -2 | 4 | 32 |
| 9 | 11 | 99 | -1 | 1 | 11 |
| 10 | 13 | 130 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 5 | 55 | 1 | 1 | 5 |
| 12 | 4 | 48 | 2 | 4 | 16 |
| 13 | 5 | 65 | 3 | 9 | 45 |
| 14 | 2 | 28 | 4 | 16 | 32 |
| 15 | 1 | 15 | 5 | 25 | 25 |
| 16 | 1 | 16 | 6 | 36 | 36 |
| 17 | 0 | 0 | 7 | 49 | 0 |
| 18 | 1 | 18 | 8 | 64 | 64 |
| | 60 | 600 | | | 354 |

*Tabella 1 - Dati relativi all'esercizio 1.*

**Esercizio 2)**

L'esercizio richiede di stimare il valore atteso della seguente variabile

*X:pazienti che visitano lo studio del medico in un giorno estivo*

Le ipotesi necessarie per la stima con i metodi visti a lezione prevedono.

- Almeno treta osservazioni (soddisfatta)
- Estrazioni i.i.d. (il fatto che un paziente sia andato dal medico possiamo condirare che non influenzi la probabilità che ci vada un altro)

La stima puntuale si ha ricordando che lo stimatore dell valore atteso è la media campionarià, pertanto si ha che

$$\hat{E[X]}=\bar{x}=10$$

Nel caso in esame la Varianza di X non è nota pertanto la stima per intervallo è data dalla seguente:

$$\left[\bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{N}};\bar{x}+z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{N}}\right]$$

Fissato il livello di confidenza $\alpha$ al10 % si ha che

$$z_{0.05}=-1.65 \qquad z_{0.95}=1.65$$

Mentre dai dati in tabella 1 si ricava che

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{N-1}}=\sqrt{\frac{354}{59}}=\sqrt{6}=2.45$$

Da cui si ha la stima per intervallo richiesta

$$\left[10-1.65\frac{2.45}{\sqrt{59}};10-1.65\frac{2.45}{\sqrt{59}}\right]=\left[10-\frac{4.04}{7.68};10+\frac{4.04}{7.68}\right]=[9.47;10.53]$$

**Esercizio 3)**
a) raccolga i dati relativi alle ossevazioni estive ed invernali in una tabella a doppia entrata;
Una volta raccolte le osservazioni dell'esercizio 1 in classi coerenti con quelle dell'esercizio 3 si ha la seguente tabella:

| | | Y:numero di clienti per giorno | | | | Totali |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Meno di 9 | Fra 9 e 11 | Fra 12 e 14 | Oltre 14 | |
| X:periodo | Mesi invernali | 13 (15) | 23 (26) | 15 (13) | 9 (6) | 60 |
| | Mesi estivi | 17 (15) | 29 (26) | 11 (13) | 3 (6) | 60 |
| Totali | | 30 | 52 | 26 | 12 | 120 |

Tabella 2 Dati esercizio 3

b) descriva il tipo di carattere della bivariata ottenuta;

La bivariata raccoglie un carattere qualitativo (mese estivo o invernale) ed un carattere quantitiativo pertanto non ha alcun carattere proprio.
c) se possibile calcoli un indice sintetico di posizione per la bivariata ottenuta;
L'unico indice che si può calcolare, di quelli visti a lezione, per questo tipo di bivariata è la moda. che risulta essere

(Mesi estivi, fra 9 e 11)

d) il candidato stabilista se esite una qualche dipedenza fra i due caratteri componenti la bivariata. il candidato indichi le ipotesi necessarie per eseguire il test e proceda al calcolo anche qualora queste non siano soddisfatte.

Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficiente mente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendeza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadranto avente gradi di libertà paria quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j}=n\,\hat{p}_{i,j}=\frac{n_{i,+}\,n_{+,j}}{n} \quad \forall i,j$$

nella Tabella 2 si ripotano le frequenze marginali e quelle teoriche fra parentesi.A questo punto è possibile valutare la convergenza dell stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione è verificata si può procedere al calcolo della regione di accettazione fissato il livello di significatività al 5%.

$$A=\left[0;X^2_{1-\alpha}\left((M_x-1)(M_y-1)\right)\right]=\left[0;X^2_{1-0.05}\left((2-1)(4-1)\right)\right]=\left[0;X^2_{0.95}(3)\right]=[0;7.81]$$

Si può ora procedere al calcolo dello stimatore vero e proprio

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}\frac{\left(n_{i,j}-\hat{n}_{i,j}\right)^2}{\hat{n}_{i,j}}=\frac{(13-15)^2}{15}+\frac{(23-26)^2}{26}+\frac{(15-13)^2}{13}+\frac{(9-6)^2}{6}+\frac{(17-15)^2}{15}+\frac{(29-26)^2}{26}+\frac{(11-13)^2}{13}+\frac{(3-6)^2}{6}=4.84$$

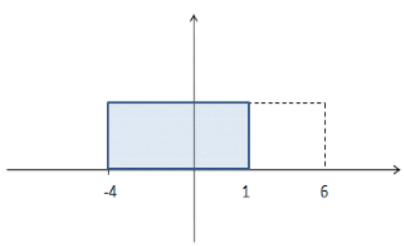
Poichè il valore dello stimatore è interno all'intervallo di accettazione posso dire che i due caratteri sono indipendenti ad un livello di significatività del 5%.

**Esercizio 4)**

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità sapendo che la probabilità che i due eventi si verifichino contemporaneamente è pari al 10%:

*P*($E_1$)*:* è la probabilità di estrarre da una gaussiana standardizzata un numero non negativo. Nella gaussiana standard l'asse X=0 è asse di simmetria della gaussiana, quindi l'area sottesa dalla curva da meno infinito a zero (P(x<0)); coincide con quella sottesa dallo zero a più infinito P(x>0). Inoltre essendo la loro somma pari all'unità si ha che $P(E_1) = 0.5$

$P(E_2)$ per calcolare la probablità richieste e necessario disegnare la d.d.p. in esame. Essa sarà uniforme fra -4 e 6 ad un valore K e nulla dalle altre parti. L'area sottesa dalla curva pertanto sarà un rettangolo di base 10 (6-(-4)) e di altezza K. Ricordando che l'area sottesa da un d.d.p. è unitaria si ha che 10K = 1 da cui K = 1/10. L'area che determina $P(E_2)$ è quella di un rettangolo con base 5 (da -4 a +1) ed altezza 1/10 da cui si ha che $P(E_2) = 0.5$.




Le restanti probabilità si calcolano utilizzando le defnizioni assiomatiche:

$$P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)=0.5+0.5-0.1=0.9$$

$$P(E_1|E_2)=P\frac{(E_1\cap E_2)}{P}(E_2)=\frac{0.1}{0.5}=0.2$$

b) Il candidato verfichi se gli eventi sono statisticamente dipendenti.

Due eventi si dicono statisticamente dipendenti se ilverificarsi di un evento modifica la probabilità che si verifichi l'altro. In simboli $P(E_1|E_2)\neq P(E_1)$ poichè questa condizione è verificata i due eventi si possono dire dipendenti.