Probabilità II

Variabili casuali discrete

- Definizioni principali.
- Valore atteso e Varianza.
- Teorema di Bienaymé - Čebičev.
- V.C. Notevoli: Bernoulli e Binomiale.

Concetto di variabile casuale

- Cos'è una variabile casuale?

  Idea di massima: una grandezza il cui valore dipende dall'esito di un accadimento dal risultato incerto.

- Perché abbia senso (e sia utile) debbo:
  - Definire cosa sia un accadimento dall'esito incerto
  - Distinguere i valori possibili da quello assunto.
  - Trovare un modo per discernere quali siano i valori più o meno probabili.

Concetto di variabile casuale

- Cos'è una variabile casuale?

  Idea di massima: una grandezza il cui valore dipende dall'esito di un accadimento dal risultato incerto.

- Perché abbia senso (e sia utile) debbo:
  - Definire cosa sia un accadimento dall'esito incerto

    (Nozioni di Esperimento, Esito ed Evento)
  - Distinguere i valori possibili da quello assunto.

    (Modalità ed osservazione)
  - Trovare un modo per discernere quali siano i valori più o meno probabili.

    (Calcolo delle probabilità)

Variabile casuale: definizione

Definizione: una variabile casuale è una grandezza il cui valore è legato al verificarsi di un evento.

- Una v.c. viene descritta completamente associando ad ogni modalità la probabilità che questa sia osservata.

- Il tipo di associazione cambia a seconda del tipo di v.c.
  - Discrete: distribuzione di probabilità.
  - Continue: densità di probabilità.

- *Nota*: a volte si parla di variabili stocastiche o aleatorie. Esse sono sinonime di v.c.

Variabile casuale: notazioni

- Una v.c. viene identificata con una lettera maiuscola
  - Y: esito del lancio di un dado a 6 facce.
  - X: # mezzi pubblici usati da un veronese l'8/11/2010.

- Le modalità si indicano con la lettera minuscola.
  - $y_1 = 1; y_2 = 2; y_3 = 3; y_4 = 4; y_5 = 5; y_6 = 6.$
  - $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2; x_4 = 3; x_5 = 4; ....$

- L'evento "osservazione della i-sima modalità" si indica
  - $Y= y_i \Rightarrow P(Y=y_i)$:probabilità che si osservi la modalità y_i.
  - $X= x_i \Rightarrow P(X=1)$:probabilità l'estratto abbia preso un mezzo.

Variabile casuale discreta

Definita univocamente dalla distribuzione di probabilità.

- Distribuzione di probabilità: possiamo considerarla come una funzione reale di numeri reali così definita

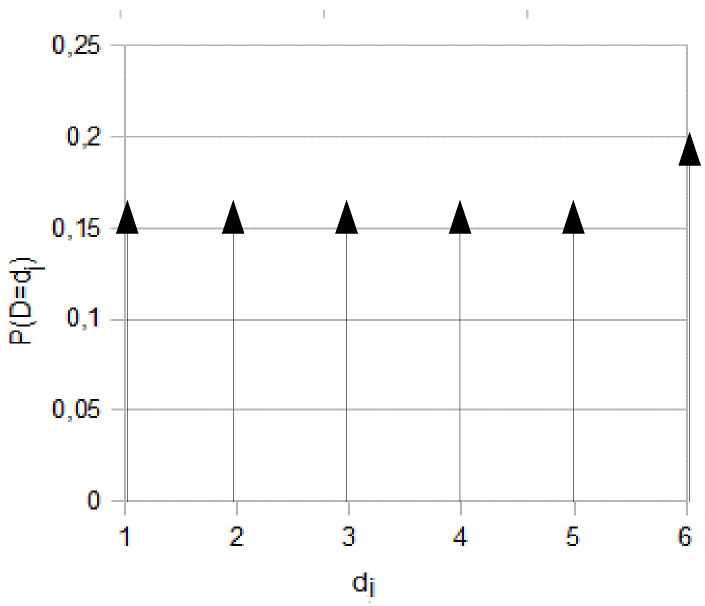
$$p(x) = P(X = x)$$

- Esempio D: esito del lancio di un dado a 6 facce truccato.

  - tabellare

d_i	$P(D=d_i)$
1	0,160
2	0,160
3	0,160
4	0,160
5	0,160
6	0,200
tot	1,000

  - grafica



Valore atteso E[.]

- Anche per una v.c. si può definire un indice di posizione che sintetizzi la distribuzione di probabilità.
- Valore atteso $E[X]$
  a volte indicato con μ

$$E[X]=\sum_{i=1}^{M} P(X=x_i)x_i$$

$$E[X]=\sum_{i=1}^{M} p(x_i)x_i$$

- Esempio di calcolo
  - D: lancio di un dado a 6 facce truccato.

$$E[D]=\sum_{i=1}^{M} d_i\,p(d_i)$$

$$E[D]=1\cdot 0{,}16+2\cdot 0{,}16+3\cdot 0{,}16+4\cdot 0{,}16+5\cdot 0{,}16+6\cdot 0{,}2$$

$$E[D]=3{,}6$$

d_i	$P(D=d_i)$	$p(d_i)d_i$
1	0,160	0,160
2	0,160	0,320
3	0,160	0,480
4	0,160	0,640
5	0,160	0,800
6	0,200	1,200
	1,000	3,600

Valore atteso E[.]: interpretazione

- Osservazione: $E[.]$ non è una modalità, come la media.

- Osservazione: $E[X]$ descrive l'esito di diverse estrazioni <u>tutte uguali</u> (concetto da definire) di X.

- Prove indipendenti ed identicamente distribuite (i. i. d.):
  - Indipendenti: l'esito di una prova non influenza le successive.
  - Identicamente distribuite: tutte le prove hanno la stessa $p(x)$.

- $E[X]$ descrive l'esito medio atteso a fronte di <u>*tante*</u> prove i.i.d.

Valore atteso E[.]: proprietà - I

- I valori attesi di due vv.cc. lineari fra loro, hanno lo stesso legame.

$$Y = c\,X \quad \rightarrow \quad E[Y] = c\,E[X] \quad \forall\, c \in \Re$$

  - Esempio:
    - X = costo del pane in euro al kg in Italia. $E[X] = 2.1$
    - Y = costo del pane in euro all'etto in Italia.

$$Y = \frac{1}{10}X \quad \rightarrow \quad E[Y] = \frac{1}{10}E[X] = 0.21$$

- I valori attesi di due vv. cc. affini, hanno lo stesso legame.

$$Y = a\,X + b \quad \rightarrow \quad E[Y] = a\,E[X] + b \quad \forall\, a, b \in \Re$$

  - Esempio
    - X = temperatura a Verona misurata in °C. $E[X] = 14.7$
    - Y = temperatura a Verona misurata in °F.

$$Y = 1.8\,X + 57.6 \quad \rightarrow \quad E[Y] = 1.8\,E[X] + 57.6 = 80.06$$

Valore atteso E[.]: proprietà - II

- Il valore atteso di una combinazione lineare di due vv. cc. è dato dalla stessa combinazione lineare dei loro valori attesi.

$$Z = c_1 X + c_2 Y \quad \rightarrow \quad E[Z] = c_1 E[X] + c_2 E[Y] \quad \forall c_1, c_2 \in \Re$$

  - Esempio:
    - X = consumo al km di una auto gpl $E[X] = 0.10$
    - Y = pedaggio al km di una autostrada. $E[Y] = 0.07$
    - Z = costo di un viaggio di 40 km di cui 30 in autostrada.

$$Z = 40X + 30Y \quad \rightarrow \quad E[Z] = 40E[X] + 30E[Y] = 6.1$$

- La proprietà si estende alla combinazione lineare di un numero qualunque (purché finito) di vv. cc.

$$Y = \sum_{i=1}^{K} c_i X_i \quad \rightarrow \quad E[Y] = \sum_{i=1}^{K} c_i E[X_i] \quad \forall c_i \in \Re$$

Varianza Var[.] e deviazione standard

- Anche per le v.c. si può definire un indice di variabilità.
  - Varianza $Var[X]$ $Var[X]=\sum_{i=1}^{M} P(X=x_i)(x_i-E[X])^2$

$$Var[X]=\sum_{i=1}^{M} p(x_i)(x_i-E[X])^2$$

$$Var[X]=\left(\sum_{i=1}^{M} x_i^2\, p(x_i)\right)-(E[X])^2$$

  - Deviazione Standard $sd=\sigma=\sqrt{Var[X]}$
- Esempio di calcolo
  - D: lancio di un dado truccato. $E[D]=3{,}6$

$$Var[D]=\left(\sum_{i=1}^{M} d_i^2\, p(d_i)\right)-(E[D])^2$$

$$Var[D]=(16)-(3{,}6)^2=16-12{,}96=3{,}04$$

$$sd[D]=\sqrt{Var[D]}=\sqrt{3{,}04}=1{,}74$$

d_i	$p(d_i)$	d_i^2	$p(d_i)d_i^2$
1	0,160	1	0,160
2	0,160	4	0,640
3	0,160	9	1,440
4	0,160	16	2,560
5	0,160	25	4,000
6	0,200	36	7,200
	1,000		16,000

Varianza Var[.]: proprietà - I

- Date due vv. cc. affini si ha la seguente relazione

$$Y = a\,X + b \quad \rightarrow \quad Var[Y] = a^2\,Var[X] \quad \forall\, a, b \in \Re$$

  - Esempio:
    - X = temperatura a Verona misurata in °C. $Var[X] = 4.7$
    - Y = temperatura a Verona misurata in °F.

$$Y = 1.8\,X + 57.6 \quad \rightarrow \quad Var[Y] = (1.8)^2\,Var[X] = 15.228$$

  - Osservazione: La costante di proporzionalità fra le vv. cc. a compare al quadrato nel legame fra le varianze. Questo fatto è facilmente interpretabile ricodando come la varianza esprima la media del <u>quadrato</u> degli scarti.
  - Osservazione: La somma di una quantità nota ad una v.c. influenza il valore atteso ma non la varianza (e quindi la variabilità).

Varianza Var[.]: proprietà - II

- La varianza della somma o delle differenza di 2 vv. cc. <u>indipendenti</u> è data dalla somma delle varianze delle due vv. cc.

$$Z = X + Y \quad \rightarrow \quad Var[Z] = Var[X] + Var[Y]$$
$$Z = X - Y \quad \rightarrow \quad Var[Z] = Var[X] + Var[Y]$$

  - Osservazione: la varianza della somma algebrica di due vv. cc. è destinata a crescere rispetto a quelle originali indipendentemente dal fatto che si le vv. cc. siano sommate o sottratte.

Valore atteso, varianza e probabilità

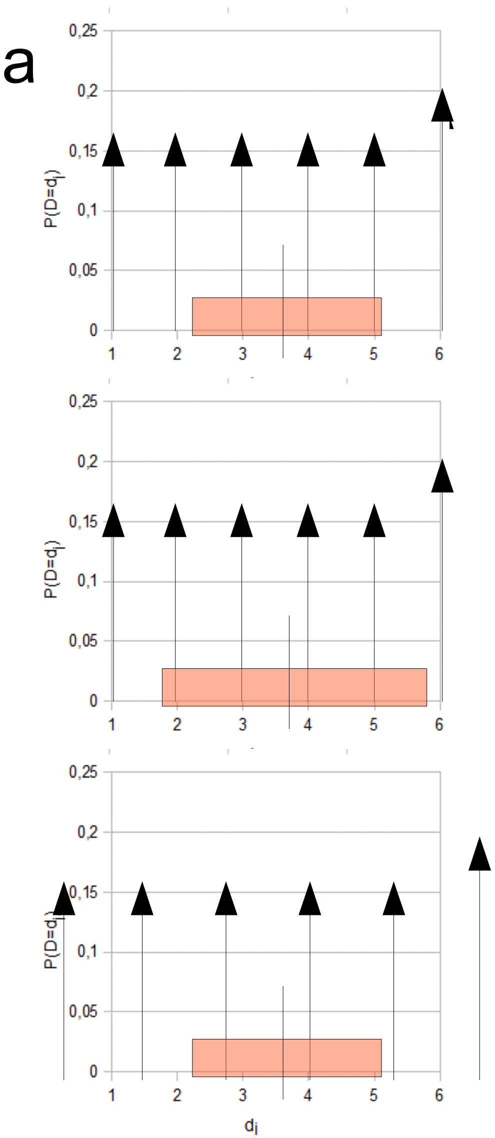
- Consideriamo un intervallo simmetrico rispetto al valore atteso di una v.c. X

$$I := \left[E[X] - \varepsilon \,;\, E[X] + \varepsilon \right]$$

- Come sarà la probabilità

$$p_s = P(X \in I)$$

  - Maggiore è ε, maggiore sarà p_s (considero un intervallo più grande)
  - Se $Var[X]$ cresce, p_s diminuisce (le realizzazioni tendono ad allontanarsi dal $E[X]$)



- Osservazioni: queste considerazioni sono legate al concetto di variabilità e non dipendono dal tipo di v.c. considerata.

Teorema di Bienaymé - Čebičev

- Si dimostra che: data una v.c. X con $E[X] = \mu$ e $Var[X] = \sigma^2$,
  - La probabilità che X assuma valori che si discostano dal suo valore atteso più ε non supera la varianza divisa per il quadrato di ε.

$$P(|X-\mu|>\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

  - Considerando l'evento complementare si ha:

$$P(\mu-\varepsilon<X<\mu+\varepsilon)>1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

- Esempio:una v.c. X ha $E[X]=10$ e $Var[X]=1$, determinare un intervallo che abbia almeno il 60% di probabilità di contenere una osservazione.

$$1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\geq\frac{60}{100} \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{10}\geq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon^2\geq 10\frac{\sigma^2}{4}\geq 2.5 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon^2\geq 2.5 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon\geq 1.58$$

$$[8.42\,;\,11.58]$$

V.c. (o prova) di Bernoulli

- Molto semplice: alcuni autori la chiamano <u>prova Bernoulliana</u>.
- V. c. discreta X con due modalità $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.
- Le due probabilità solitamente hanno "nomi propri"
  - $p = P(X=1)$.
  - $q = P(X=0) = 1 - P(\overline{X=0}) = 1 - P(X=1) = 1 - p$.

- Valore atteso: $E[X] = p$.
  - Dimostrazione: $E[X] = \sum_{i=1}^{2} p(x_i) x_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

- Varianza: $Var[X] = pq$.
  - Dimostrazione: $Var[X] = \sum_{i=1}^{2} p(x_i)(x_i - E[X])^2$

  $$Var[X] = q(0-p)^2 + p(1-p)^2 = q \cdot p^2 + p \cdot q^2 = pq(p+q) = pq$$

V.c. (o prova) di Bernoulli: esempi

- X: lancio di una moneta onesta.
  - Se impongo che
    - $X = 0$ se esce testa => $P(X = 0) = 0.5$.
    - $X = 1$ se esce croce => $P(X = 1) = 0.5$.
  - X ha la stessa distribuzione di probabilità di una v.c. Bernoulliana con $p=0.5$,
    - In simboli $X \sim Ber(0.5)$
    - Si legge: X è distribuita come ...
- Y: Estrazione di un numero primo lanciando un dado a 6 facce
  - Se impongo che
    - $Y = 0$ se non esce un primo => $P(Y = 0) = 2/6$.
    - $Y = 1$ se esce un primo => $P(Y = 1) = 4/6$.
  - Ho che: $Y \sim Ber(2/3)$

V.c. Binomiale

- Somma di *n* variabili di Bernoulli i.i.d.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad X_i \sim Ber(p)$$

- $n+1$ modalità $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$, …, $y_{n+1} = n$.
- Si dimostra che:
  - $P(Y = y_k) = p(y_k) = \binom{n}{y_k} p^{y_k} q^{n-y_k}$
  - $\binom{a}{b}$ è detto coefficiente binomiale e vale $\binom{a}{b} = \dfrac{a!}{b!(a-b)!}$
- Valore atteso: $E[Y] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$
- Varianza: $Var[Y] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$

V.c. Binomiale: esempi - I

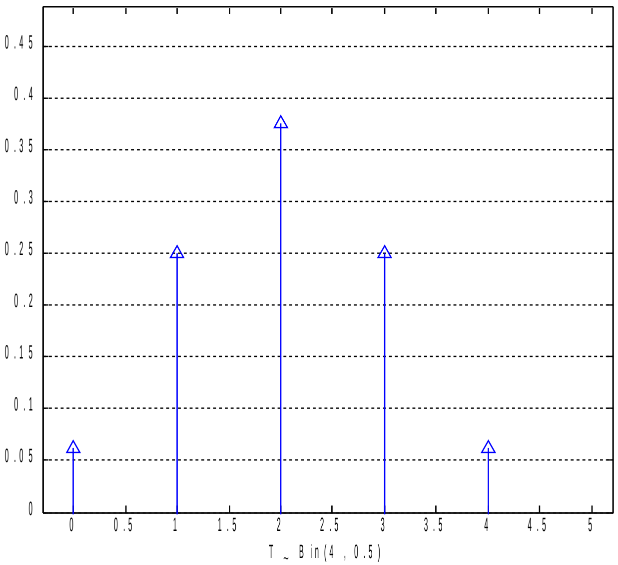
- B: # di 6 ottenuti lanciando di un dado onesto 10 volte.
  - Se creo 10 variabili $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ per cui impongo
    - $X_i = 0$ se l'esito del i-simo tiro sia diverso da 6
    - $X_i = 1$ se l'esito del i-simo tiro sia 6
  - ho che
    - le variabili create sono indipendenti
    - $X \sim Ber(1/6)$
    - $B = \sum_{i=1}^{n} X_i$
  - B: ha la stessa distribuzione di probabilità di una v.c. Binomiale con $p=1/6$ *ed* $n = 10$.
    - In simboli

$$B \sim Bin(10\,;1/6)$$

V.c. Binomiale: esempi - II

- T: # di teste ottenute lanciando una moneta onesta 4 volte.

$$T \sim Bin(4\,;0.5)$$

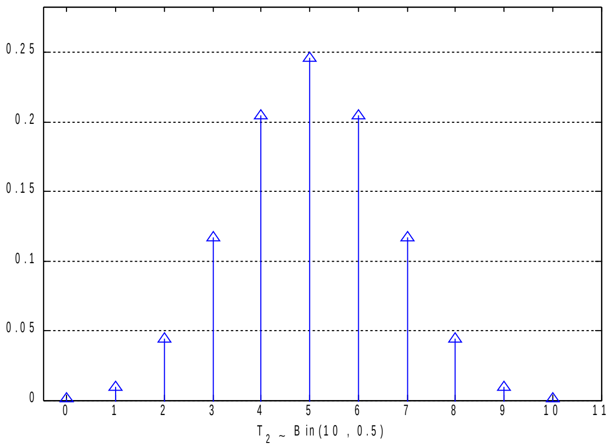


$$E[T]=2$$

$$Var[T]=1$$

- T_2: # di teste ottenute lanciando una moneta onesta 10 volte.

$$T_2 \sim Bin(10\,;0.5)$$



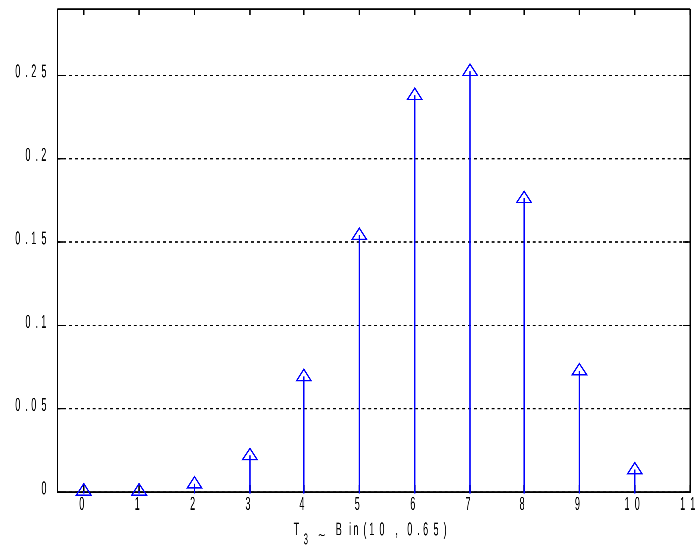
$$E[T]=5$$

$$Var[T]=2.5$$

V.c. Binomiale: esempi - III

- T_3: # di teste ottenute lanciando una moneta disonesta 10 volte.

$$T_3 \sim Bin(10\,;0.65)$$

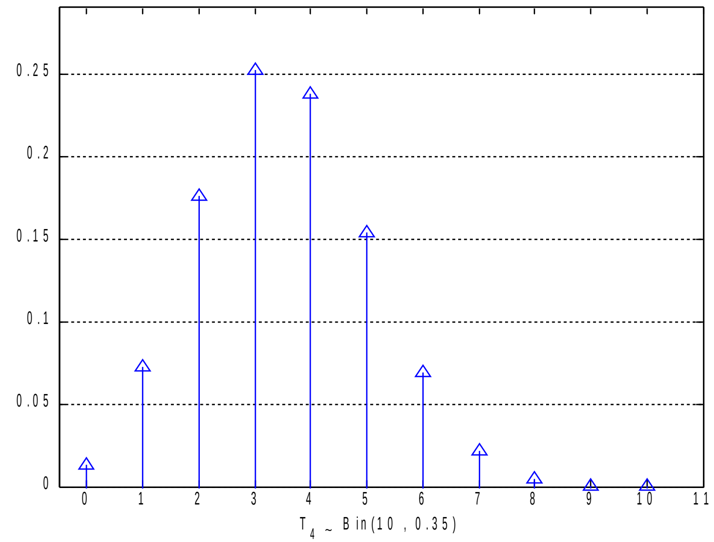


$$E[T_3]=6.5$$

$$Var[T_3]=2.275$$

- T_4: # di teste ottenute lanciando una moneta disonesta 10 volte.

$$T_4 \sim Bin(10\,;0.35)$$



$$E[T_4]=3.5$$

$$Var[T_4]=2.275$$

Ricapitolando - I

- Distribuzione di probabilità di una v.c. X: $p(x)=P(X=x)$
- Valore atteso: $E[X]=\sum_{i=1}^{M} p(x_i)x_i$
- Varianza: $Var[X]=\left(\sum_{i=1}^{M} p(x_i)(x_i^2)\right)-(E[X])^2$
- Variabili affini: $Y=aX+b$
  - $E[Y]=aE[X]+b$
  - $Var[Y]=a^2 Var[X]$
- Combinazione lineare di vv. cc. <u>indipendenti</u> $Y=\sum_{i=1}^{K} c_i X_i$
  - $E[Y]=\sum_{i=1}^{K} c_i E[X_i]$
  - $Var[Y]=\sum_{i=1}^{K} c_i^2 Var[X_i]$
- Teorema di Bienaymé - Čebičev

$$P(|X-E[X]|>\varepsilon)\leq\frac{Var[X]}{\varepsilon^2}$$

Ricapitolando - II

- Bernoulliana $X \sim Ber(p)$
  - $p(1) = p\,;\, p(0) = 1 - p = q$
  - $E[X] = p$
  - $Var[X] = pq$
- Binomiale $X \sim Bin(n, p)$
  - $p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
  - $E[X] = np$
  - $Var[X] = npq$