TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

a.a. 2011/12 (Prof. M. Spera)

Prova scritta del 9 luglio 2012

(1) Enunciare e dimostrare il teorema di Brouwer per un disco chiuso.

(2) In $\left(\mathbb{H}, \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}\right)$, dire se $X = y\dfrac{\partial}{\partial x}$ è di Killing.

(3) In $\left(\mathbb{H}, \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}\right)$, dato $X = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$, calcolare $X^{\flat}$.

(4) Dire se $X^{\flat}$ è chiusa. È esatta? In caso affermativo se ne trovi una primitiva ($X^{\flat} = df \ldots$).

(5) $\mathbb{H} \equiv \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Im} z > 0 \}$.
Calcolare $H^1(\mathbb{H} \setminus \{i\})$.

Tempo a disposizione: 1h 15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

① Teorema di Brouwer
(per un disco chiuso)

Topogeo
9 luglio 2012

② Su $\left(\mathbb{H}, \frac{dx^2+dy^2}{y^2}\right)$ dire se $X = y\frac{\partial}{\partial x}$ è di Killing

$$\mathcal{L}_X g = \mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}}\left(\frac{dx^2}{y^2} + \frac{dy^2}{y^2}\right) =$$

$$= \overbrace{\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}}\left(\frac{1}{y^2}\right)}^{0} dx^2 + \frac{1}{y^2}\left(\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}} dx\right) dx + \frac{1}{y^2} dx \mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}}(dx)$$

$$+ \underbrace{\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}}\left(\frac{1}{y^2}\right)}_{=0} dy^2 + \frac{1}{y^2}\left(\underbrace{\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}} dy}_{=0}\right) dy + \frac{1}{y^2} dy \left(\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}} dy\right)$$

$$\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}}\left(\frac{1}{y^2}\right) = y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}\right) = 0$$

$$\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}} dx = d\left(\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}} x\right) = d\left(y \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\frac{\partial x}{\partial x}}}\right) = dy$$

$$\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}} dy = d\left(\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}} y\right) = d\left(y \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0}\right) = 0$$

Dunque

$$\mathcal{L}_X g = \frac{1}{y^2} dy \otimes dx + \frac{1}{y^2} dx \otimes dy = \frac{2}{y^2} dx\, dy$$

$\Rightarrow$ X non è di Killing

$$dx\, dy = \frac{1}{2}(dx \otimes dy + dy \otimes dx)$$

③ Su $\left(\mathbb{H}, \frac{dx^2+dy^2}{y^2}\right)$, dato $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

Calcolare X^b (forma..) $\qquad X \sim \begin{pmatrix} -y \\ +x \end{pmatrix}$

$$v_i = g_{ij} v^j$$

$$X^b = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ +x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{y} \\ +\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} \qquad X^b = \underbrace{-\frac{1}{y}}_{P} dx + \underbrace{\frac{x}{y^2}}_{Q} dy$$

④ Dire se X^b è chiusa. È esatta? Si individuarne una primitiva ($X^b = df$)

$$dX^b = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \frac{\partial\left(\frac{+x}{y^2}\right)}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial\left(-\frac{1}{y}\right)}{\partial y}}$$

$$= \frac{+1}{y^2} - (+y^{-2}) = +\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} = 0 \qquad \frac{1}{y} = y^{-1} \quad \frac{\partial \frac{1}{y}}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$$

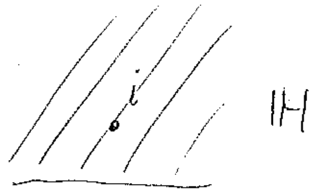
$\mathbb{H} \overset{\sim}{\approx} \mathbb{R}^2$ omeom. $\Rightarrow H^1(\mathbb{H}) = 0 \qquad X^b$ è esatta!

$$\begin{cases} -\frac{1}{y} = f_x & f = -\frac{x}{y} + \psi(y) \\ +\frac{x}{y^2} = f_y & f = +x\,\frac{y^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{x}{y} + \varphi(x) \end{cases}$$

$$\boxed{f = -\frac{x}{y} + c}$$

$(y>0)$

(5) Calcolare $H^1(\mathbb{H} \setminus \{\overset{\overset{(0,1)}{\equiv}}{i}\})$



Sol. $\mathbb{H} \setminus \{i\} \approx$  disco aperto bucato

$\simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{pt\} \overset{\text{om. eq.}}{\sim} S^1$

$\Rightarrow \quad H^1(\mathbb{H} \setminus \{i\}) \cong H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}$