

Preappello 28/5

ESERCIZIO Siano $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Il polinomio di Lagrange $l_3(x)$ per il punto x_3 è

$$l_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(3-0)(3-2)} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

Per trovare il polinomio di interpolazione per i punti (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) scriviamo

$$P_3(x) = \sum_{i=1}^3 y_i l_i(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

SVANTAGGIO DELLA RAPPRESENTAZIONE DI LAGRANGE DI $P_m(x)$ è che aggiungendo un nodo devo ricalcolare tutti i polinomi di Lagrange.

Si può ovviare a questo inconveniente adottando la rappresentazione di Newton per $P_m(x)$.
Ci serve il concetto di DIFFERENZA DIVISA.

DEF. Siano x_i , $i = 0, \dots, n$ $n+1$ nodi distinti. Siano $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ $n+1$ valori. Definiamo

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (\text{Diff. Div. del } 1^{\circ} \text{ ordine})$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \quad (\text{Diff. Div. del } 2^{\circ} \text{ ordine})$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \quad (\text{Diff. Div. del } 3^{\circ} \text{ ordine})$$

⋮

$$x_3 - x_0$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m] = \frac{f[x_1, \dots, x_m] - f[x_0, \dots, x_{m-1}]}{x_m - x_0}$$

(Diff. Div. di ordine m)

Osserviamo che, per due modi, $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0]$$

In generale vale il

TEOREMA Le differenze divise di ordine n NON dipendono dall'ordine dei nodi.

Ad esempio, si ha

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_2, x_1] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_0, x_1] = f[x_2, x_1, x_0]$$

È consuetudine rappresentare le differenze divise in tabelle. Vediamo degli esempi.

x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1) \quad f[x_0, x_1]$

x_0	$f(x_0)$
$\dots$	$\dots$

x_0	$f(x_0)$		
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$

x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

ESEMPIO Costruire la tabella delle differenze divise associate ai nodi $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$

$x_0 =$	-1	0		
$x_1 =$	0	1	$\textcircled{1}$	
$x_2 =$	1	3	$\textcircled{2}$	$\textcircled{\frac{1}{2}}$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = \textcircled{1}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{1 - 0} = \textcircled{2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{2 - 1}{1 - (-1)} = \textcircled{\frac{1}{2}}$$

TEOREMA [ESPRESSIONE DI NEWTON DEL POLINOMIO DI INTERPOLAZIONE]

Il polinomio interpolante per i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$ si può esprimere come

$$P(x) = f(x_0) +$$

$$+ f[x_0, x_1] (x - x_0) +$$

$$+ f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x-x_0)(x-x_1) +$$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}$

$$\rightarrow f[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m] (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{m-1})$$

ESEMPIO Calcolare il polinomio di interpolazione per i punti:

$$(x_0, y_0) = (-1, 1) ; (x_1, y_1) = (0, 2) ; (x_2, y_2) = (1, 0) ; (x_3, y_3) = (2, 1)$$

La tabella delle differenze divise associate è

$X_0 = -1$

$X_1 = 0$

$X_2 = 1$

$X_3 = 2$

$P(x_0) = 1$

$P[x_0, x_1] = 2$

$P[x_0, x_1, x_2] = -3/2$

$P[x_0, x_1, x_2, x_3] = 3/2$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{2 - 1}{0 - (-1)} = \textcircled{1}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{1 - 0} = -2$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{1 - 0}{2 - 1} = \underline{1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-2 - 1}{1 - (-1)} = -\frac{3}{2}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{1 - (-2)}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_2, x_1, x_2]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{3}{2} - (-\frac{3}{2})}{2 - (-1)} = 1$$

Quindi, il polinomio di interpolazione è

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \\ &+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = \\ &= 1 + 1(x-(-1)) - \frac{3}{2}(x-(-1))(x-0) + \\ &+ 1 \cdot (x-(-1))(x-0)(x-1) = \\ &= 1 + x + 1 - \frac{3}{2}(x+1)x + (x+1)x(x-1) = \\ &= 2 + \cancel{x} - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \cancel{x^3} - \cancel{x} = \\ &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 \end{aligned}$$

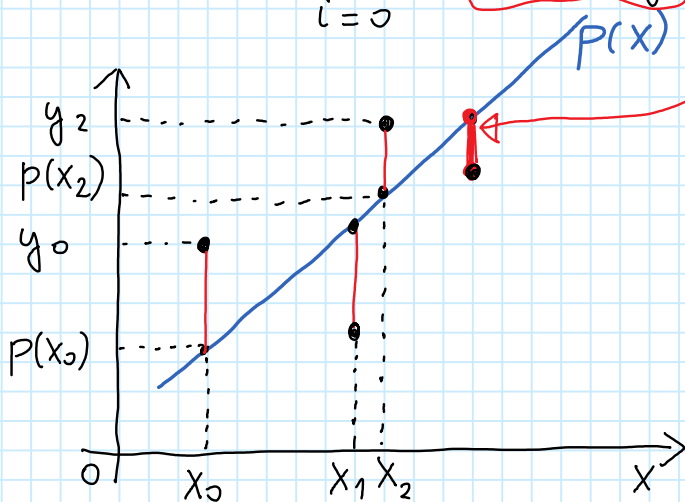
ESERCIZI

- ① Sia $f(x) = x^3 + x$ e $x_i = i$, $i = 0, 1, 2$.
Calcolare $f[x_0, x_1, x_2]$.
- ② Sia $f(x) = x^3 + x^2$ e $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.
Calcolare
 $f[x_0, x_1, x_2, x_3] - f[x_3, x_1, x_0, x_2]$
- ③ Sia $f(x) = \sin(x)$ e $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$.
Calcolare il polinomio che interpola $f(x)$ nei nodi
 x_0, x_1, x_2 .

APPROSSIMAZIONE AI MINIMI QUADRATI

Siano (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, m$ $m+1$ punti del piano.
Vogliamo trovare un polinomio $p(x)$ di grado al più m
con $m < m$ (nei casi pratici è $m \ll m$) tale che
è MINIMA la quantità

$$d = \sum_{i=0}^m [p(x_i) - y_i]^2$$



Minimizzo la somma degli scarti verticali del quashoto.

Posto

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$$

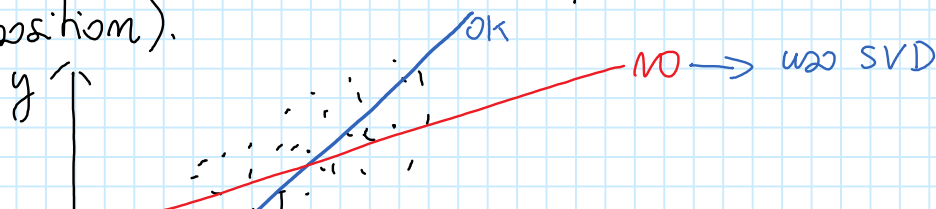
il polinomio (detto polinomio di approssimazione ai minimi quadrati di grado m) si dimostra che i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_m$ sono soluzioni del sistema lineare

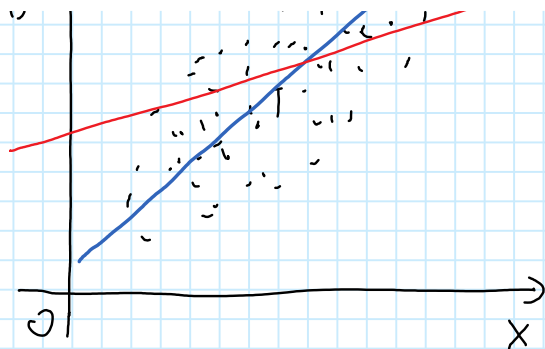
$$A^T A \underline{a} = A^T \underline{y} \quad \text{con} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^m \end{pmatrix} \quad \text{che ha } m+1 \text{ righe e } m+1 \text{ colonne}$$

Può capitare che il sistema lineare $A^T A \underline{a} = A^T \underline{y}$ sia malcondizionato per cui per ottenere una soluzione buona è necessario ricorrere a metodi "avanzati" quali la SVD (Singular Value Decomposition).





Nel caso $m=1$ si parla di rette di regressione. Ricerchiamole.

$$p(x) = a_0 + a_1 x$$

$$d(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^m [a_0 + a_1 x_i - y_i]^2$$

problema di minimo
di una funzione di due
variabili a_0 e a_1 .

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial a_0} = \sum_{i=0}^m 2 \cdot (a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0 \\ \frac{\partial d}{\partial a_1} = \sum_{i=0}^m 2 (a_0 + a_1 x_i - y_i) \cdot x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot \left(\sum_{i=0}^m 1 \right) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^m x_i = \sum_{i=0}^m y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^m x_i + a_1 \sum_{i=0}^m x_i^2 = \sum_{i=0}^m x_i y_i \end{cases}$$

$= m+1$

che vuole dire a_0 ed a_1 . Dalle relazioni che esprimono A possiamo ottenere questo sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m+1 & \sum_{i=0}^m x_i \\ \sum_{i=0}^m x_i & \sum_{i=0}^m x_i^2 \end{pmatrix}$$

allora risulta

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m y_i \\ \sum_{i=0}^m x_i y_i \end{pmatrix}$$