

Inferenza II

Test di ipotesi

- Definizioni
- Costruzione di un test.
- Test sul valore atteso
- Test di aderenza alla distribuzione.
- Test di indipendenza.

1

Inferenza: tipologie di approcci.

- Teoria della stima: Cerco di ottenere una stima numerica di una caratteristica (spesso un indice) della popolazione dai dati.
- Test di ipotesi: Faccio un'ipotesi su di una proprietà (parametro, distribuzione, indipendenza) della distribuzione teorica della popolazione P e verifico se le osservazioni consentono di accettarla.
 - Possibili domande da test:
 - $E[P]$ è maggiore di 15 ?
 - La variabile P è distribuita come una $Bin(2; 0.5)$?
 - (se P è multi-variata) P_1 e P_2 sono indipendenti?
- Osservazione: la stima trae un parametro dai dati, il test fa un'ipotesi sul parametro e usa i dati per confermare l'ipotesi.

Test di ipotesi: ipotesi nulla.

- Osservazione: Un test di ipotesi cerca di verificare se una asserzione è vera o falsa.
- L'asserzione in esame:
 - Viene chiamata ipotesi nulla
 - Di norma è una ipotesi di uguaglianza
 - Si indica con la notazione H_0 .
 - Si esprime in linguaggio naturale o in simboli
- Esempi
 - H_0 : il valore atteso della popolazione è 2 $\rightarrow H_0: E[P] = 2$
 - H_0 : la popolazione è distribuita come una binomiale avente $p = 0.2$ e $n = 3$. $\rightarrow H_0: P \sim Bin(3; 0.2)$.

3

Test di ipotesi: ipotesi alternativa.

- Se il test dà esito “negativo” si usa dire che l'ipotesi nulla viene rifiutata e si accetta l'ipotesi alternativa.
- Ipotesi alternativa:
 - Descrive l'evento che si pensa sia plausibile.
 - Si indica con la notazione H_1 .
 - Si esprime in linguaggio naturale o in simboli.
- Esempi
 - $H_0: E[P] = 2$. $H_1: E[P] \neq 2$.
 - $H_0: Var[P] = 1$. $H_1: Var[P] \leq 1$.
- Osservazione: ad una ipotesi nulla posso corrispondere diverse ipotesi alternative.

4

Test di ipotesi: esempio I.

- Una ditta che produce sferette di acciaio garantisce che la sua produzione ha valore atteso 8 mm e scarto quadratico medio di 0.2 mm .
- Per verificare la bontà della produzione si estrae un campione di 60 sfere (ottenendo $\bar{x} = 8.1\text{ mm}$) e si vuole osservare se la produzione rispetta i canoni.

$$H_0 : E[P] = 8\text{ mm.} \quad H_1 : E[P] \neq 8\text{ mm.}$$

- **Osservazione:** nel caso si ritenga vera H_0 vuol dire che la differenza fra la media campionaria ed il valore atteso è dovuta al particolare realizzazione di P e non da un mutamento della d.d.p. di P .

5

Test di ipotesi: esempio II.

- Un'azienda farmaceutica sostiene che il suo farmaco cura una particolare patologia nel 95% dei casi.
- Un ricercatore ospedaliero sostiene che questa informazione non sia più attendibile e che il farmaco sia peggiorato. Pertanto, conduce una indagine su 120 pazienti e trova che solo 108 sono guariti (il 90%).

$$P \sim \text{Ber}(p)$$

$$H_0 : p = E[P] = 0.95 \quad H_1 : p < 0.95$$

- **Osservazione:** nel caso in esame dal test si evince un modello per la v.c. usata per descrivere la popolazione.

6

Test di ipotesi: idea.

Come verificare se un'ipotesi è vera analizzando i dati di un campione C di dimensione n ?

- **Osservazione:** l'ipotesi nulla si rifiuta se la differenza fra il valore stimato e quello teorico è "significativa".
- **Idea:** Suppongo H_0 vera e calcolo un intervallo di valori probabili per lo stimatore A . Se la stima ottenuta dal campione ricade in A , accetto l'ipotesi nulla.
- **Osservazione:** A può essere calcolato basandosi sulle considerazioni viste nella stima per intervallo ad un livello di confidenza $1 - \alpha$.
- Nel test di ipotesi α prende il nome di livello di significatività.

7

Test di ipotesi: strategia.

- Come verificare se un'ipotesi è vera da un campione C ?
- Possibile strategia:
 - Si suppone H_0 vera.
 - Si calcola la distribuzione di uno stimatore
 - corretto per il parametro θ descritto in H_0
 - calcolato da un campione a dimensione N .
 - Si fissa un livello di significatività α .
 - Si trova una regione di accettazione (A).
 - Si stima puntualmente il parametro θ dal campione C
 - Se il valore è interno ad A accetto l'ipotesi H_0
 - Se il valore è esterno ad A rifiuto l'ipotesi H_0
- **Osservazione:** i dati si usano solo nell'ultimo passo

8

Test sul valore atteso - I.

Applico la strategia:

- Si suppone H_0 vera.

Suppongo $E[P] = \mu_0$

- Si calcola la distribuzione di uno stimatore
 - corretto per il parametro θ descritto in H_0 .
 - calcolato da un campione a dimensione n .

Lo stimatore corretto è la media campionaria $\bar{x}$.

Si sa che per n "grande" si ha che

$$\bar{X} \sim N(E[P]; \frac{Var[P]}{n}) = N(\mu_0; \frac{Var[P]}{n})$$

standardizzando

Se $Var[P]$ è nota $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{Var[P]}{n}}} \sim Z$ altrimenti $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim Z$

9

Test sul valore atteso - II.

- Si fissa un livello di significatività α .

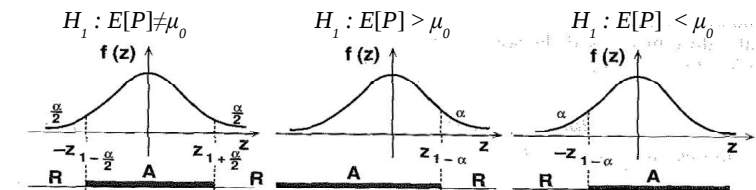
Valori tipici sono $\alpha = 0.05$; $\alpha = 0.02$; $\alpha = 0.01$

- Si trova una regione di accettazione (A).

tre possibili scenari

Test bilaterale (a 2 code)

Test unilaterale (a 1 coda)



Osservazione: è H_1 a determinare la regione di accettazione.

10

Test sul valore atteso - III.

- Si stima puntualmente il parametro θ dal campione C
 - Se il valore è interno ad A accetto l'ipotesi H_0
 - Se il valore è esterno ad A rifiuto l'ipotesi H_0

Si procede al semplice calcolo della media campionaria

E si applica il criterio.

- Osservazione: anche se non esplicitate si sono sottintese due ipotesi:
 - Campionamento bernoulliano
 - Distribuzione limite ($n > 30$)

11

Test di ipotesi: esempio I - svolgimento.

- Una ditta che produce sferette di acciaio garantisce che la produzione ha valore atteso 8 mm e s.q.m. 0.2 mm.
- Campione di $n = 60$ sfere ottenendo $\bar{x} = 8.1$ mm.

$$H_0 : E[P] = 8 \text{ mm.}$$

$$H_1 : E[P] \neq 8 \text{ mm.}$$

Svolgimento:

- $H_0 + \text{testo} \rightarrow E[P] = 8 ; Var[P] = 0.04$
- $n = 60 \rightarrow \bar{X} \sim N(E[P]; \frac{Var[P]}{n}) = N(8; \frac{0.002}{3})$
- $H_1 \rightarrow \text{test a due code}$
- $\alpha = 0.05 \rightarrow \text{Valori Critici } -1.96; 1.96 \rightarrow A = [-1.96; 1.96]$
- Standardizzo $\bar{x} \quad z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - 8}{\sqrt{\frac{0.002}{3}}} = 3.873$
- $z_{\bar{x}} \notin A \rightarrow \text{Rifiuto } H_0$

12

Test sul valore atteso.

- Popolazione P continua o discreta. Test per verificare se $E[P] = \hat{\mu}$.
- n osservazioni i.i.d. da cui ricavo la media campionaria $\bar{x}$.

Svolgimento

- $H_0: E[P] = \hat{\mu} \Rightarrow \hat{x} = \hat{\mu}$
- $H_1: E[P] \neq \hat{\mu}$
- $H_2: E[P] < \hat{\mu}$
- $H_3: E[P] > \hat{\mu}$
- Verificare la convergenza in legge dello stimatore.
se $n > 30 \Rightarrow \bar{x} \sim N(\hat{\mu}; \frac{Var[P]}{n})$ altrimenti aumentare n .
- Si fissa $\alpha \rightarrow$ trovo regione di accettazione
- Standardizzo $\bar{x}$ $z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \hat{\mu}}{\sqrt{\frac{Var[P]}{n}}}$
- se $z_{\bar{x}} \in A$ accetto H_0 altrimenti rifiuto H_0

$$H_1: A = \left[z_{\frac{\alpha}{2}}; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

$$H_2: A = \left[z_{\alpha}; \infty \right]$$

$$H_3: A = \left[-\infty; z_{1-\alpha} \right]$$

13

Test di ipotesi: esempio II - svolgimento.

- Un farmaco cura una particolare patologia nel 95 % dei casi.
- Campione di $n = 120$ pazienti con $\bar{x} = 90\%$ di guarigioni.

$$H_0: E[P] = 0.95 \quad H_1: E[P] < 0.95$$

Svolgimento:

- $H_0 + \text{testo} \rightarrow P \sim \text{Ber}(p) \rightarrow E[P] = p = 0.95; Var[P] = p(1-p) = 0.0475$
- $n = 120 \rightarrow \bar{X} \sim N(E[P]; \frac{Var[P]}{n}) = N(0.95; \frac{0.0475}{120})$
- $H_1 \rightarrow$ test a una coda, unilaterale sinistro
- $\alpha = 0.01 \rightarrow$ Valore Critico $-z_{0.01} = -2.33 \rightarrow A = [-2.33; +\infty[$
- Standardizzo $\bar{x}$ $z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - 0.95}{\sqrt{\frac{0.0475}{120}}} = -2.513$
- $z_{\bar{x}} \notin A \rightarrow$ Rifiuto H_0

14

Test sulla distribuzione.

- Osservazione: spesso sarebbe utile poter fare ipotesi sulla distribuzione di frequenza di una v.c.

Esempio III:

- Si ha il dubbio che un dado sia "truccato".
- Lanciando il dado $n = 150$ volte si sono ottenuti gli esiti a lato
- Come verificare l'asserzione?

i	n_i
1	23
2	25
3	32
4	18
5	30
6	22
	150

- Per applicare la tecnica vista debbo

- Definire un ipotesi
- Scegliere uno stimatore
- Calcolare la d.d.p. di riferimento dello stimatore

15

Test sulla distribuzione: ipotesi I.

- L'esperimento può essere descritto mediante n realizzazioni i.i.d. di una v.c. discreta D la cui d.d.p. viene descritta da:

- 6 modalità $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- 6 parametri: $P(D=1) = \hat{p}_1 \quad P(D=2) = \hat{p}_2 \quad \dots \quad P(D=6) = \hat{p}_6$

- L'ipotesi nulla pertanto è che la d.d.p. sia costante ovvero

$$H_0: \hat{p}_i = \frac{1}{6} \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

- L'ipotesi alternativa è quella data dall'evento complementare

$$H_1: \exists i: \hat{p}_i \neq \frac{1}{6}$$

- Osservazione:** in una v.c. discreta ad M valori, la somma delle probabilità deve essere unitaria. Pertanto è possibile fissare in modo arbitrario sono $M-1$ valori.

16

Test sulla distribuzione: stimatore.

- **Osservazione:** l'ipotesi nulla coinvolge più parametri. Vorrei ottenere un solo valore per avere una v.c. mono-variata.

- **Frequenze teoriche:** frequenza attesa se H_0 è vera:

$$\hat{n}_i = n \hat{p}_i$$

- **Contingenza:** scarto fra frequenza rilevata e teorica:

$$c_i = n_i - \hat{n}_i$$

- **Osservazione:** se H_0 è vera è verosimile che tutte le contingenze (in valore assoluto) siano piccole.
- **Osservazione:** se H_1 è vera è verosimile che almeno una contingenza (in valore assoluto) sia elevata.

17

Stimatore di Pizzetti-Pearson.

- La contingenza è la base di uno stimatore per quantificare l'aderenza di una distribuzione teorica ad una reale (H_0).

- Stimatore di Pizzetti-Pearson: $\sum_{i=1}^M \frac{c_i^2}{\hat{n}_i} = \sum_{i=1}^M \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$

– Il quadrato evita il segno e pesa molto i valori alti.

– Il rapporto serve per scalare correttamente i contributi.

- Calcolo in tabella

– Esempio III

$$- \sum_{i=1}^6 \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} = 5,8$$

i	n_i	$\hat{n}_i$	$n_i - \hat{n}_i$	$(n_i - \hat{n}_i)^2$	$(n_i - \hat{n}_i)^2 / \hat{n}_i$
1	23	25	-2	4	0.16
2	25	25	0	0	0
3	32	25	7	49	1.96
4	18	25	-7	49	1.96
5	30	25	5	25	1
6	22	25	-3	9	0.36
	150				5,8

18

Stimatore di Pizzetti-Pearson : d.d.p.

- La strategia di test richiede la d.d.p. dello stimatore.
- **Teorema:** si dimostra che, al crescere della dimensione del campione (n) allora si ha che

$$\sum_{i=1}^M \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} \sim \chi^2(v)$$

dove v sono i parametri liberi della d.d.p. di P ($M-1$).

- **Nota:** il risultato si fonda sul limite centrale.
- Molti autori ritengono che si abbia una buona convergenza in legge quando tutte le frequenze teoriche sono maggiori di 5.
- **Osservazione:** l'ipotesi ($\hat{n}_i > 5 \quad \forall i$), nota la d.d.p. ($\hat{p}_i$) può sempre venir rispettata aumentando la dimensione del campione n .

$$\hat{n}_i = n \hat{p}_i$$

19

Test sulla distribuzione: ipotesi II.

- **Osservazione:** l'ipotesi alternativa si basa sulla frequenza teorica.

$$H_1: \exists i: \hat{p}_i \neq \frac{1}{6}$$

- **Osservazione:** lo stimatore si basa sulla contingenza.

$$c_i = n_i - \hat{n}_i = n_i - n \hat{p}_i$$

Come fissare la regione di accettazione per lo stimatore di Pizzetti-Pearson ?

- **Osservazione:** se l'ipotesi nulla sulle frequenze teoriche è rispettata, la contingenza è bassa $\rightarrow$ il valore $\chi^2(v)=0$ deve essere incluso nell'intervallo di accettazione.
- **Conclusione:** Il test richiesto deve essere unilaterale destro.

20

Esempio III: svolgimento.

- Si vuole vedere se un dado è truccato.
- Si son effettuati $n=120$ lanci rilevando 6 frequenze $n_1, n_2, \dots, n_6$.

- Svolgimento

$$H_0: \hat{p}_i = \frac{1}{6} \Rightarrow \hat{n}_i = 25 \quad H_1: \exists i: \hat{p}_i \neq \frac{1}{6}$$

- Verificare la convergenza in legge

$$\hat{n}_i = 25 > 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^6 \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} \sim \chi^2(5)$$

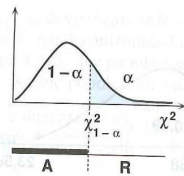
- $H_1 \rightarrow$ test a una coda, unilaterale dx

- $\alpha = 0.01 \rightarrow$ Valore Critico $\chi^2_{0.99}(5) = 15.1 \rightarrow A = [0; 15.1]$

- Calcolo lo stimatore = 5.8

- $5.8 \in A \rightarrow$ Accetto H_0 (il dado è "onesto" ad un livello del 1%)

- Osservazione: il procedimento può essere generalizzato.



21

Test per la distribuzione empirica

- Popolazione P con M modalità. Test per verificare se $P(P=i) = \hat{p}_i$.
- n realizzazioni i.i.d. con $n_1, n_2, \dots, n_M$ osservazioni

- Svolgimento

$$H_0: P(P=i) = \hat{p}_i \Rightarrow \hat{n}_i = n p_i \quad H_1: \exists i: P(P=i) \neq \hat{p}_i$$

- Verificare la convergenza in legge dello stimatore.

$$\text{se } \hat{n}_i > 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^M \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} \sim \chi^2(M-1) \text{ altrimenti aumentare } n.$$

- $H_1 \rightarrow$ test a una coda, unilaterale dx

- Si fissa $\alpha \rightarrow A = [0; \chi^2_{1-\alpha}(M-1)]$

- Calcolo lo stimatore

- se lo stimatore è interno ad $A \rightarrow$ accetto H_0

- se lo stimatore è esterno ad $A \rightarrow$ rifiuto H_0

22

Test di indipendenza: Esempio IV.

- Osservazione: In una bi-variata (x_i, y_j) il test di indipendenza mira a stabilire se i caratteri X ed Y son indipendenti.

- Esempio IV: (tratto da descrittiva III)

- Caratteri:

X : trattamento antibiotico Y : stato dell'infezione

$M_x = 2 \{Si; No\}$ $M_y = 3 \{Espansa, Stabile, Ridotta\}$

- $n = 100$ rilevazioni

		Infezione			Totali
		Espansa	Stabile	Ridotta	
Trattamento	Si	31	9	10	50
	No	9	15	26	50
	Totali	40	24	36	100

23

Test di indipendenza: idea - I.

- Supposizione: i caratteri X ed Y sono indipendenti.
- Conseguenza: le probabilità degli eventi della bivariata son dati dal prodotto degli eventi delle due monovariate.

$$P(X=Si \cap Y= Espansa) = P(X=Si) P(Y= Espansa)$$

$$P(X=x_i \cap Y=y_j) = P(X=x_i) P(Y=y_j)$$

- Osservazione: $P(X=x_i)$ e $P(Y=y_j)$ possono essere stimate dalle frequenze relative marginali. (definizione classica)

- Conseguenza: nel caso di indipendenza è possibile ricavare una distribuzione teorica valida per la bivariata.

		Y			Totali
		Espansa	Stabile	Ridotta	
X	Si	20/100	12/100	18/100	50/100
	No	20/100	12/100	18/100	50/100
Totali		40/100	24/100	36/100	1

- Osservazione: Tabella ricavata dalle SOLE marginali.

24

Test di indipendenza: idea - II.

- Date le osservazioni di una bi-variata, la v.c. P avente:
 - $M = M_x M_y$ modalità (indicate da m_{ij}).
 - d.d.p. $\hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+}}{n} \frac{n_{+,j}}{n} \quad i=1,2,..M_x, j=1,2,..M_y$
 descrive la bi-variata se e solo se vi è indipendenza.
- **Idea:** L'indipendenza viene testata con un test di aderenza alla distribuzione teorica.
- Per poter applicare l'idea debbo:
 - Calcolare le frequenze teoriche
 $\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} \quad \forall i, j$
 - Verificare la convergenza in legge dello stimatore di Pizzetti – Pearson. ($\hat{n}_{i,j} > 5 \quad \forall i, j$)
 - Calcolare i parametri liberi di P .

25

Test di indipendenza: parametri liberi.

- La d.d.p. di P possiede $M = M_x M_y$ modalità.
- Vi sono dei vincoli dati dalle marginali.
 - M_x vincoli $\sum_{j=1}^{M_y} \hat{n}_{i,j} = n_{i,+} \quad i=1,2,..M_x$
 - M_y vincoli $\sum_{i=1}^{M_x} \hat{n}_{i,j} = n_{+,j} \quad j=1,2,..M_y$
 - 1 vincolo doppio

- Verde: libero
- Rosso: vincolato

		Y				
		a	b	c	d	
X	1					$n_{1,+}/n$
	2					$n_{2,+}/n$
	3					$n_{3,+}/n$
		$n_{+,1}/n$	$n_{+,2}/n$	$n_{+,3}/n$	$n_{+,4}/n$	1

- I parametri liberi risultano essere $(M_x - 1)(M_y - 1)$
- se $\hat{n}_{i,j} > 5 \quad \forall i, j$ si ha che: $\sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} \frac{(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} \sim \chi^2((M_x - 1)(M_y - 1))$

Test di indipendenza (di Pearson)

- Popolazione bi-variata (x_i, y_j) dove X ed Y son indipendenti.
- n prove i.i.d. con n_{ij} osservazioni delle $M = M_x M_y$ modalità.
- Svolgimento
 - H_0 : X ed Y indipendenti H_1 : X ed Y dipendenti
 - Calcolo le frequenze teoriche $\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} n_{+,j}}{n} \quad \forall i, j$
 - Verificare la convergenza in legge dello stimatore. $\hat{n}_{i,j} > 5 \quad \forall i, j$
 - Si fissa $\alpha \rightarrow A = [0; \chi^2_{1-\alpha}((M_x - 1)(M_y - 1))]$
 - Calcolo lo stimatore di Pizzetti-Pearson
 - se lo stimatore è interno ad $A \rightarrow$ accetto H_0
- **Osservazione:** $\hat{n}_{i,j}$ si calcola dalle osservazioni.
- **Conseguenza:** se la convergenza non è verificata non è detto che lo sia aumentando n !

Esempio IV - svolgimento I.

X: trattamento antibiotico

Y: stato dell'infezione

$$M_x = 2 \quad M_y = 3 \quad n = 100$$

		Infezione			Totali
		Espansa	Stabile	Ridotta	
Trattamento	Si	31	9	10	50
	No	9	15	26	50
Totali		40	24	36	100

- Calcolo frequenze teoriche

		Y			Totali
		Espansa	Stabile	Ridotta	
X	Si	20/100	12/100	18/100	50/100
	No	20/100	12/100	18/100	50/100
Totali		40/100	24/100	36/100	1

		Y		
		Espansa	Stabile	Ridotta
X	Si	20	12	18
	No	20	12	18

- Convergenza verificata $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} \sim \chi^2(2)$
- $\alpha = 0.01 \rightarrow A = [0; 9.21]$

28

Esempio IV – svolgimento II.

- Calcolo contingenza e stimatore di Pizzetti - Pearson

		Infezione						Y			
		Espansa	Stabile	Ridotta	Totali			Espansa	Stabile	Ridotta	Totali
Trattamento	Si	31	9	10	50	X	Si	20	12	18	
	No	9	15	26	50		No	20	12	18	
	Totali	40	24	36	100						

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} = 20,71$$

- Lo stimatore è esterno ad A $\rightarrow$ rifiuto $H_0 \rightarrow$ le variabili sono dipendenti.
- Osservazione:** il test asserisce che la conoscenza di un carattere (es. ha fatto il trattamento) modifica la proprietà dell'altra (es. lo stato dell'infezione).
- Osservazione:** il trattamento è però pessimo. Si è provato che esso aumenta la probabilità espandere l'infezione $m_{1,1} > m_{2,1}$.²⁹

Livello di significatività: considerazioni

- Osservazione:** α corrisponde ad una probabilità, quale?

Probabilità corrispondente alla regione di rifiuto nella distribuzione di riferimento

- Pertanto:
 - Distribuzione di riferimento $\rightarrow H_0$ vera
 - Regione di rifiuto $\rightarrow$ rifiuto l'ipotesi
- Conclusione:** Il livello di significatività descrive la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando questa è vera.

$$P(\text{rifiutare } H_0 | H_0 \text{ vera}) = \alpha$$

30

Test di ipotesi: tipo di errori

- In quanti modi posso sbagliare a fornire un risultato?

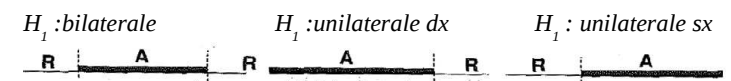
Risultato test	Realtà	
	H_0 Vera	H_0 Falsa
Accettare H_0	OK	Errore
Rifiutare H_0	Errore	OK

- Errore di I° tipo: rifiutare un'ipotesi valida (falso positivo)
- Errore di II° tipo: accettare un'ipotesi falsa (falso negativo)
- Osservazione:** le probabilità dei due errori sono dipendenti.
- Osservazione:** la probabilità di un falso positivo è espressa dal livello di significatività
- Osservazione:** la probabilità di un falso negativo difficilmente è calcolabile.

31

Ricapitolando - I

- Ipotesi: nulla (H_0) e alternativa (H_1).
 - H_0 : stato normale. Sempre ipotesi di uguaglianza.
 - H_1 : descrive il motivo per cui faccio il test.
- Strategia di progetto del test
 - Suppongo valida l'ipotesi nulla.
 - Noto stimatore T che confermi H_0 e ne trovo la d.d.p.
 - Fisso un livello di significatività α .
 - Fisso la regione di accettazione A tale $P(T \in A) = 1 - \alpha$



- Se lo stimatore calcolato nel campione è in A accetto H_0 .³²

Ricapitolando - II

- Test sul valore atteso $H_0: E[P] = \hat{\mu}$
 - Stimatore media standardizzata $z_x = \frac{\bar{x} - \hat{\mu}}{\sqrt{\frac{Var[P]}{n}}}$
 - Convergenza $n > 30 \Rightarrow z_x \sim Z$

$$H_1: E[P] \neq \hat{\mu} \Rightarrow A = \left[\frac{z_\alpha}{2}; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

$$H_2: E[P] < \hat{\mu} \Rightarrow A = \left[z_\alpha; \infty \right]$$

$$H_3: E[P] > \hat{\mu} \Rightarrow A = \left[-\infty; z_{1-\alpha} \right]$$
 - Se $Var[P]$ ignota si stima con la varianza campionaria s^2 .
- Test di aderenza $H_0: P(P=i) = \hat{p}_i \Rightarrow \hat{n}_i = n p_i$ $H_1: \exists i: P(P=i) \neq \hat{p}_i$
 - Stimatore di Pizzetti-Pearson
 - Condizione di convergenza $\hat{n}_i > 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^M \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} \sim \chi^2(M-1)$
 - $A = \left[0; \chi_{1-\alpha}^2(M-1) \right]$

33

Ricapitolando - III

- Test di indipendenza
 - $H_0: X \text{ ed } Y \text{ indipendenti}$ $H_1: X \text{ ed } Y \text{ dipendenti}$
 - Stimatore di Pizzetti-Pearson
 - Condizione di convergenza

$$\hat{n}_{i,j} > 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^M \frac{(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} \sim \chi^2((M_x - 1)(M_y - 1)).$$

$$A = \left[0; \chi_{1-\alpha}^2((M_x - 1)(M_y - 1)) \right]$$

34