Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2014/2015
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 7
18 novembre 2014

1. Si decida se sono veri o falsi i seguenti enunciati (motivando la risposta).
   (a) Esiste un isomorfismo di campi $\mathbb{Q}[x]/(x^4-7) \cong \mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})$.
   (b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ è il campo di riducibilità completa di x^3-2 su $\mathbb{Q}$.
   (c) Dati $n \geq 2$ numeri primi distinti $p_1, \ldots, p_n$, la radice n-sima del prodotto $\sqrt[n]{p_1 \ldots p_n}$ è sempre irrazionale.

(6 punti)

2. Si consideri il polinomio $f = x^3 + x^2 - 1$ in $\mathbb{Q}[x]$.
   (a) Sia u una radice di f. Si trovi il grado dell'estensione $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$
   (b) Sia u una radice di f. Si scriva $\frac{2u}{u+1} \in \mathbb{Q}(u)$ come espressione polinomiale in u a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

(4 punti)

3. Sia p un numero primo, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ il campo con p elementi e $f = x^p - x - 1 \in \mathbb{F}_p[x]$
   (a) si verifichi che f non ha radici in $\mathbb{F}_p$
   (b) Sia $\alpha \in E$ una radice di f, con E opportuna estensione di $\mathbb{F}_p$. Si provi che per ogni $a \in \mathbb{F}_p$, $\alpha + a$ è radice di f.
   (c) Si provi che $\mathbb{F}_p(\alpha)$ è campo di riducibilità completa per f su $\mathbb{F}_p$ e si scriva f come prodotto di fattori lineari in $\mathbb{F}_p(\alpha)$
   (d) Si dimostri che f è irriducibile in $\mathbb{F}_p[x]$ (Sugg: si supponga g un divisore di f con grado $r < p$; si studi il coefficiente di x^{r-1} in g e si deduca che $r\alpha \in \mathbb{F}_p$)

(*8 punti*)

4. Sia $u = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$.
   (a) si verifichi che u è algebrico su $\mathbb{Q}$ e se ne determini il polinomio minimo f (sugg: si scriva $u = \sqrt[3]{3}(1 + \sqrt[3]{3})$).
   (b) si verifichi che $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(u)$
   (c) Si trovi $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{9} - 2)$

(6 punti)

5. Sia $u = \sqrt{1 + \sqrt{3}} \in \mathbb{R}$.
   (a) si calcoli il polinomio minimo g di u su $\mathbb{Q}$ e si trovi una base di $\mathbb{Q}(u)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.
   (b) si verifichi che $\mathbb{Q}(u)$ è contenuto in $\mathbb{R}$
   (c) si verifichi che $\mathbb{Q}(u)$ non è il campo di riducibilità completa per g su $\mathbb{Q}$ (Sugg: si usi il punto 3)

(6 punti)

6. Sia $u = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$.

   (a) si verifichi che u è algebrico su $\mathbb{Q}$ e se ne determini il polinomio minimo f.
   (b) si verifichi che $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \lneq \mathbb{Q}(u)$
   (c) si verifichi che $\mathbb{Q}(u)$ è il campo di riducubilità completa di f su $\mathbb{Q}$

(**)

Consegna: martedì 25 novembre durante le esercitazioni