TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. M. Spera   a.a. 2009/10

Lezione XI

Breve digressione sulla teoria di Morse

(v. anche Appendice a Squassina - Zuccher, note di seminario, Cortona '83)

" Da X, campo vettoriale, a f "

$$X = \nabla f$$

da Poincaré - Hopf
$\chi(\Sigma_g) = 2-2g =$
$= m - s + M$
(# min, # selle, # massimi)

v. inciso

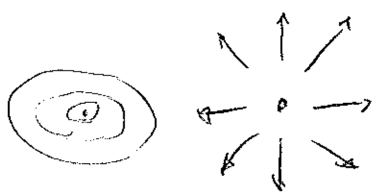
la matrice Hessiana in un pto critico è ben definita a meno di congruenza

[i.e., è ben definita la forma quadratica Hessiana]

si considerano i p critici isolati, non degeneri

(i.e. la forma quadratica Hessiana è non degenere, e ciò vale $\Leftrightarrow$ una, e quindi tutte le matrici Hessiane, in coord. diverse, sono non singolari.

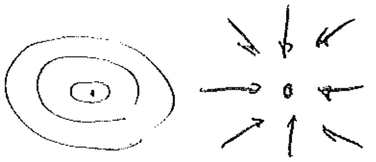
curve di livello



minimo: segnatura (2,0) (def. positiva)

$\mathcal{H} \approx \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$ $i_p(f) = 0$ (= # autov < 0

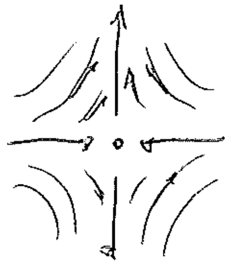
indice di Morse



massimo

$\mathcal{H} \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ segnatura (0,2) def. negativa

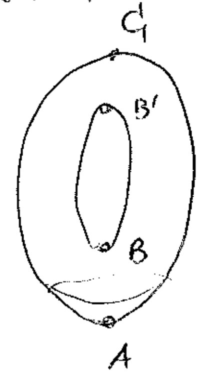
$i_p(f) = 2$ (= # autov < 0)



sella $\mathcal{H} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sign.: $(1,1)$

$i_p(f) = 1$

consideriamo nuovamente la funzione $f = h$ altezza su un toro "immerso" in $\mathbb{R}^3$
embedded



consideriamo

$\{ f \leq c \}$

sottolivelli

$c \geq 0$

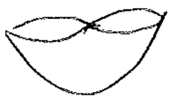
vedi inciso

$c = 0$

omotop. equivalenti

tra A e B

in B

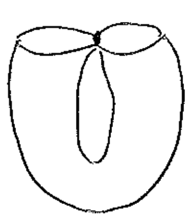


cosa succede tra  e 

attacco una 1-cella

tra B e B'

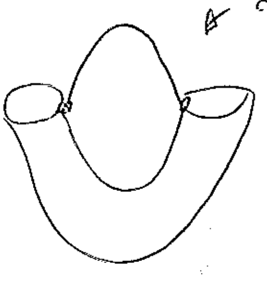
in B'



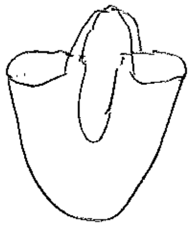
tra B' e C

cosa succede tra

 e  ?



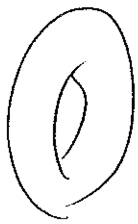
attacco una 1-cella

~  ~ 

infine

attacco una 2 cella

e trovo



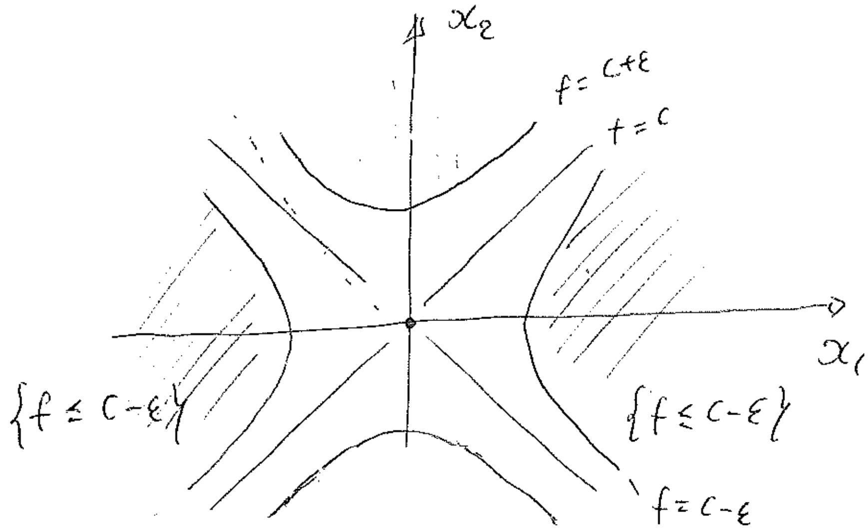
In generale, in virtù del lemma di Morse, in un intorno di un pto critico trovo un opportuno sistema di coordinate tale che

$$f = \underset{f(p)}{\overset{\parallel}{c}} - x_1^2 - x_2^2 - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots x_n^2$$

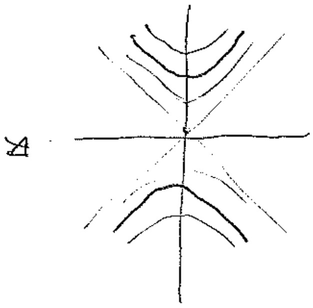
indice di p

il "paesaggio geometrico" individuato da f è, posto ($\varepsilon > 0$)

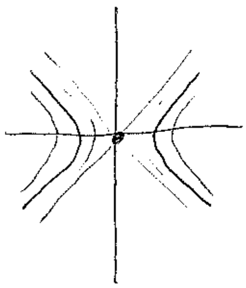
Ex: $n=2$
$k=1$



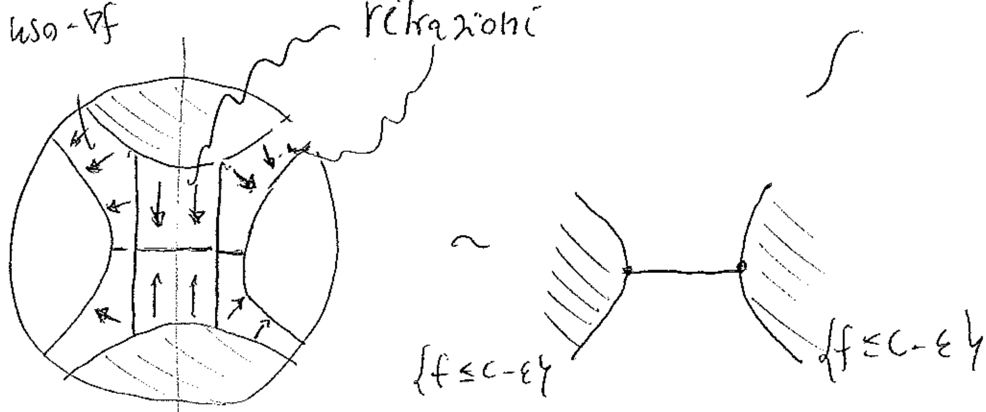
$$-x_1^2+x_2^2=\varepsilon \quad >0$$



$$-x_1^2+x_2^2=-\varepsilon$$



in dettaglio:



☆☆☆ omotopicamente, $\{f\le c+\varepsilon\}$ si ottiene da $\{f\le c-\varepsilon\}$ attaccando una k-cella, con k = indice di p.

Conseguenza del teorema di Poincaré - Hopf:

(caso particolare del teorema di Morse)

Sia data Σ_g chiusa, orientabile

Sia $f : \Sigma_g \to \mathbb{R}$

funzione di Morse, i.e. (# finito di) pti critici non degeneri

[$\mathcal{H}$ di rango massimo]

Sia
m = # minimi
s = # selle
M = # massimi

È $$\boxed{\chi(\Sigma_g) = 2-2g = m - s + M}$$

Dom. Basta considerare $X = \nabla f$

(gradiente riemanniano, risp. per es alla metrica indotta su Σ_g dalla metrica standard su $\mathbb{R}^3$)

$X(p) = 0 \iff p$ è critico per f.

$$i_p(X) = \begin{cases} 1 & p \text{ max o min} \\ -1 & p \text{ sella} \end{cases}$$

Il risultato segue da Poincaré - Hopf

☆ <u>Teoria</u> di <u>Morse</u> (cenni)

dettagli ulteriori
further details

Sia p pto <u>critico</u> di $f : M \to \mathbb{R}$
varietà (o semplic. $\mathbb{R}^n$)

$$df(p) = 0 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1 \dots n \right)$$

tale concetto è <u>intrinseco</u>.

[Esplicitamente, cambiando coordinate $\quad x \to y$

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0$$
]

non solo: calcoliamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \right) =$$

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial y_j} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial x_k}{\partial y_j} \right) =$$

$$= \sum_k \sum_h \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_h}{\partial y_i} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_i \partial y_j}$$

$$= \sum_{h,k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial y_i} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} + \underbrace{\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_i \partial y_j}}_{=\, 0}$$

(ricordare Schwartz) $\qquad$ in un pto critico

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} = \sum_{h,k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial y_i} \frac{\partial x_k}{\partial y_j}$$

$$\underset{\text{matrice Hessiana}}{\mathcal{H}_y(f)} = J^t \cdot \mathcal{H}_x(f) \cdot J$$

$\left(\frac{\partial x_h}{\partial y_i}\right)$ h : riga, j : colonna

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

(scambio h e k ... sono indici muti)

$$\sum_k \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial y_i}}_{(J^t)_{ik}} \underbrace{\sum_h \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial y_j}}_{(\mathcal{H}_x(f)\cdot J)_{kj}} \qquad \sum_h (\mathcal{H}_x(f))_{kh} \, (J)_{hj}$$

$$= \left(J^t \cdot \mathcal{H}_x(f) \cdot J\right)_{ij}$$

ovvero $\mathcal{H}_y$ e $\mathcal{H}_x$ sono congruenti

$\Big($ $A, B \in Sym_n$ $\quad \underset{\text{congruenti}}{A \cong B}$ $\quad B = M^T A M$, $M \in GL_n(\mathbb{R})$ $\Big)$

$\exists$ invariante completo : segnatura (p, q) (per Sylvester)

$p = \# \lambda_i > 0$, $\quad q = \# \lambda_i < 0$

q = indice di $[A]$ ← classe di A

A può essere portata in forma diagonale

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad p, \; q, \; n-(p+q)$$

Si parla di diagonalizzazione per congruenza

X e Y spazi topologici $\boxed{\text{inciso}}$

$X \sim Y$ stesso tipo di omotopia

homotopy type

se $\exists$ $f: X \to Y$

$g: Y \to X$

t.c. $f \circ g \sim i_Y$ $\sim$ omotope

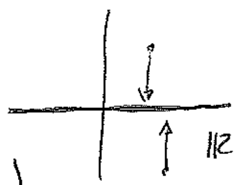
$g \circ f \sim i_X$

★ X è detto contraibile se ha lo stesso tipo di omotopia di un punto

★ Sia $i: A \hookrightarrow X$ $A \subset X$

inclusione.

ex!



Sia $r: X \to A$ tale che

$r|_A = id$ $(r \circ i = id)$

r: retrazione

Se $i \circ r : X \to X$ è $\sim id_X$,

si ha una retrazione per deformazione, ovvero

A è un retratto per deformazione (di X)

★★★ Es: $A = S^1$, $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $x = (x_1, x_2)$

$r = r(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ $i \circ r(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ è omotopa all'identità $x \mapsto x$

$F(x,t) = \dfrac{x}{\|x\|} t + (1-t)x$ $t=0$ $x \mapsto x$ id

$t=1$ $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|}$ r

$\star$ CW - complesso (Whitehead, 1949)

closure finiteness / weak topology

$(X, \mathcal{E})$ è detta CW-complesso / complex

X Hausdorff; $\mathcal{E}$ decomposizione in celle

se valgono gli assiomi seguenti

cella / cell e : sp. topologico (+) $\underset{\text{omeo}}{\cong} \mathbb{R}^n$ (o ad un disco aperto)

1. Applicazioni caratteristiche
characteristic maps

$\forall$ n-cella $e \in \mathcal{E}$ $\exists$ $\Phi_e : D^n \to X$

tale che $\overset{\circ}{D}{}^n \xrightarrow[\text{omeo}]{\sim} e$ e S^{n-1} (frontiera di D^n)

nell'unione delle celle di dim al più $n-1$

2. Finitezza della chiusura
closure finiteness

$\bar{e}$ interseca un numero finito di celle

3. topologia debole
weak topology

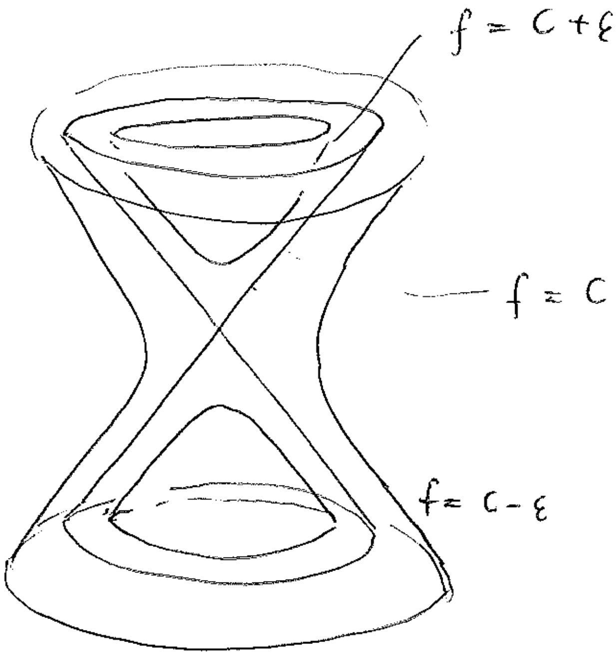
$A \subset X$ è chiuso $\iff$ $A \cap \bar{e}$ è chiuso $\forall$ cella e

---

(+) spesso per cella si intende $\bar{e}$ (sp. top. omeo ad un disco chiuso)

$n = 3$

$k = 2$



Cono:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

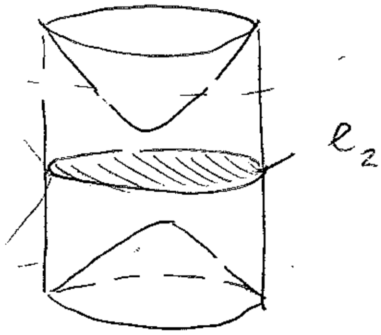
$$-x^2 - y^2 + z^2 = 0$$

$$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$f = c - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$$

$$\varepsilon = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$$

$$(\varepsilon > 0)$$



attaccamento di una 2-cella
(in ambiente tridimensionale)

Teoria di Morse

Cosa ci occorre per l'effettiva costruzione rigorosa della teoria?

What do we need for the actual rigorous construction of the theory?

- M inclusa in $\mathbb{R}^N$
  embedded
  (Whitney)

partizioni lisce dell'unità

fanno uso delle "funzioni a campana"

- Metrica Riemanniana su M
- funzioni di Morse "funzione altezza"
  lemma di Morse

★ esistenza ← Lemma di Sard

★★★ Teorema di Milnor

Ogni varietà compatta ha il tipo di omotopia di un C.W. complesso finito

Dim (schema) Per Whitney, M è sottovarietà di $\mathbb{R}^N$. Sia f una funzione di Morse. Per il lemma di Morse le sing. sono isolate e in # finito (M è compatta). Inoltre $M_a = f^{-1}((-\infty, a])$ è compatto (chiuso in compatto). Siano $p_1 \dots p_r$ i pti critici di indice 0. M si costruisce attaccando celle (di dim k $\forall$ pto di indice k), a meno di omotopia. Il teorema è dimostrato □.