TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE
Prof. M. Spera a.a. 2009/10

Lezione **XXVIII**

Teorema i) Sia G un gruppo di Lie, $H \subset G$ un sottogruppo di G che sia anche una varietà inclusa (embedded). H è allora un sottogruppo di Lie chiuso di G

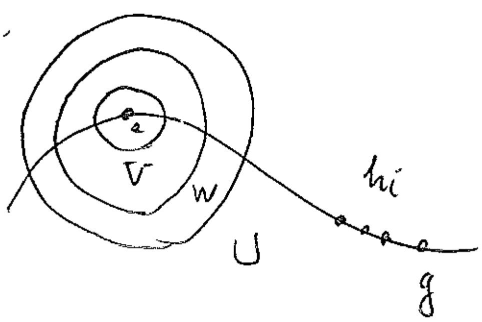
ii) ogni sottogruppo di un gruppo di Lie, chiuso, è automaticamente un gruppo di Lie (incluso) embedded

(i) moltiplicazione e inversione devono risultare lisce. Lo sono come applicazioni a valori in G; esse sono a valori in H. Poiché H è embedded, esse sono lisce

[in generale $F: M \to S \subset N$ (S embedded) liscia come $F: M \to N$, lo è come applicazione $F: M \to S$]

Rimane da provare la chiusura. Sia $\{h_i\}$, $h_i \to g$

Sia U il dominio di una carta-fetta $\ni e$



Sia $W \subset \bar{W} \subset U$

$\exists\, V \ni e$ t. che $V \times V \subset \mu^{-1}(\bar{W})$

$(\mu(g_1, g_2) = g_1^{-1} g_2)$

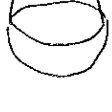
Si può assumere che $g^{-1} h_i \to e$, con $g^{-1} h_i \in V$

Ma allora $h_j^{-1} h_i = (g^{-1} h_j)^{-1} (g^{-1} h_i) \in \bar{W} \quad \forall i, j$

Sia j fissato; se $i \to \infty$ è $h_j^{-1} h_i \to h_j^{-1} g \in \bar{W} \subset \bar{U}$

Ma $H \cap U$ è una fetta, e come tale è chiusa in $U \Rightarrow$

$h_j^{-1} g \in H \Rightarrow g \in H$, i.e. H è chiuso in G



ii) è più complicato. E' istruttivo vedere come si possa identificare $\mathfrak{h}$, l'algebra di Lie di H

$$\mathfrak{h} := \{ X \in \mathfrak{g} \ : \ \exp tX \in H \quad \forall t \in \mathbb{R} \}$$

(a posteriori, è quello che dev'essere)

verifichiamo che $\mathfrak{h}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{g}$

Basta allora, ovviamente, l'additività.

siano $X, Y \in \mathfrak{h}$

lavoriamo per semplicità su un gruppo di matrici

$$\exp \frac{t}{n} X \cdot \exp \frac{t}{n} Y =$$

$$= \exp \frac{t}{n} \left(X + Y + Z\left(\frac{t}{n}\right)\right) \qquad Z(0) = 0, \quad \text{per } n \text{ abb. grande}$$

$$\left[\left(1 + \frac{t}{n} X + Z_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{t}{n} Y + Z_Y\left(\frac{t}{n}\right)\right) = \right.$$

$$\left. = 1 + \frac{t}{n}(X+Y) + \underbrace{Z_X\left(\frac{t}{n}\right) + \left(\frac{t}{n}\right)^2 XY + \frac{t}{n} Z_X(t/n) Y + \frac{t}{n} X Z_Y(t/n)}_{Z(t/n)} \right]$$

Da ciò si trova

$$\left(\exp \frac{t}{n} X \cdot \exp \frac{t}{n} Y\right)^n = \left(\exp \frac{t}{n}\left(X + Y + Z(t/n)\right)\right)^n$$

$$= \exp t\left(X + Y + Z\left(\frac{t}{n}\right)\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \exp t(X+Y)$$

$$\boxed{\exp t(X+Y) = \lim_{n \to \infty} \left(\exp \frac{t}{n} X \cdot \exp \frac{t}{n} Y\right)^n}$$

formula di Lie-Trotter

Dalla chiusura di H, e dalla formula di Lie e Trotter, segue che $X+Y \in \mathfrak{h}$, che risulta effettivamente un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{g}$

Per la dim. completa si veda il testo di Lee.

In definitiva, dato un gruppo di Lie G e un suo sottogruppo H, sono equivalenti le seguenti condizioni:

a) H è chiuso in G

b) H è un sottogruppo ~~incluso~~ embedded di G

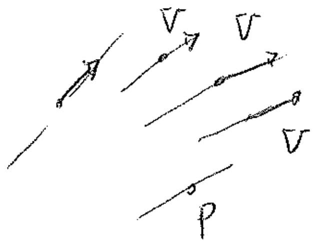
c) H è un sottogruppo di Lie embedded di G

Cf. l'esempio della "foliazione di Kronecker"

È in gioco un sottogruppo di $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, di Lie ma non chiuso (e quindi non "embedded")

*** Il teorema di Frobenius

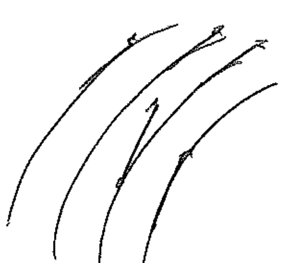
Preludio (nel piano, per semplicità)



il problema $\begin{cases} \dot{x} = X \\ \dot{y} = Y \end{cases}$

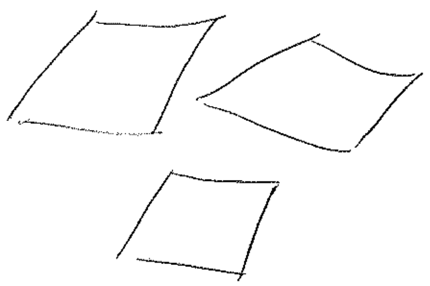
consiste nel seguente

dato un campo di direzioni individuato pto per pto da $V = (X, Y)$, campo vettoriale ($\langle V_p \rangle \leq \mathbb{R}^2$), trovarne le curve integrali, ovvero, tali che le tangenti abbiano in ogni pto la direzione assegnata



Il teorema di Cauchy-Lipschitz ci dice che il problema, almeno localmente, ha soluzione.

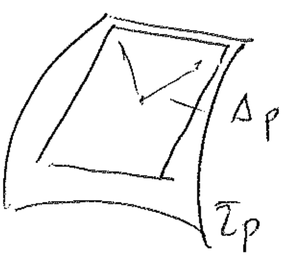
Generalizziamo (es: $\mathbb{R}^3$). Diamo una distribuzione di piani $p \to \Delta_p$ in $\mathbb{R}^3$ (liscia)



Esiste, in ogni p, una varietà integrale (una superficie Σ_p tale che

$$T_p \Sigma_p = \Delta_p \quad ?$$

[per individuare Δ_p assegniamo una coppia di campi vettoriali (X_1, X_2) tali che, localmente, $(X_1(q), X_2(q))$ diano luogo ad una base di Δ_q:

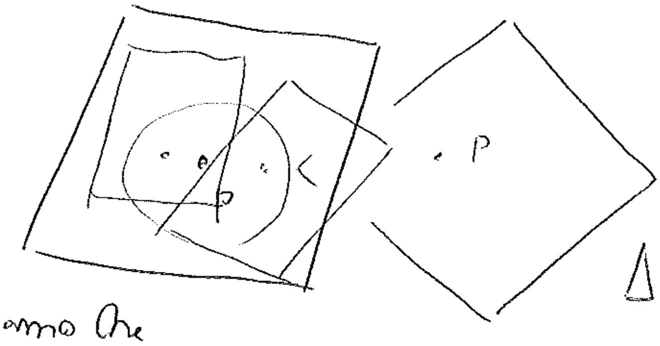


$$\langle X_1(q), X_2(q) \rangle = \Delta_q \,]$$

La risposta è NO

il punto cruciale è la condizione di chiusura rispetto alle parentesi di Lie

☆ Sul teorema di Frobenius



M. $\dim M = m = n+k$

$\forall p$ sia dato $\Delta_p \leq T_pM$

$\dim \Delta_p = n$

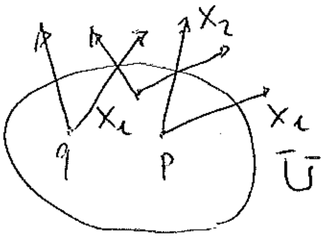
$\Delta: M \ni p \to \Delta_p \leq T_pM$

Assumiamo che

$\forall p \in M \quad \exists \quad \bar{U} \ni p \quad$ and $\quad X_1, \dots X_n \in \mathfrak{X}(\bar{U})$

t. che $\forall q \in \bar{U}$, $X_1(q) \dots X_n(q)$ siano una base di Δ_q. Δ è allora detta

<u>distribuzione</u> C^∞ <u>di dim n</u>



$\mathcal{C}^\infty$-distribution of dimension n

e $(X_1 \dots X_n)$ ne è una <u>base</u> <u>locale</u>.

Δ è detta involutoria (involutive) se in un intorno di ogni punto $\exists$ $(X_1 \dots X_n)$ base locale t. che $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k$, $c_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty$

(i.e. Δ è chiusa (loc.) rispetto al commutatore di campi vettoriali (parentesi di Lie)

N s. <u>varietà</u> <u>integrale</u> di Δ se $\exists$ $F: N \to M$ immersione (iniettiva) t.c. $\forall q \in N$, $F_*(T_q(N)) \leq \Delta_{F(q)}$

attenzione: può essere $<$

Δ è detta <u>completamente integrabile</u>

se $\forall\, p \in M$, $\exists$ intorno coordinato (U,φ), $U \ni p$

$(x_1 \dots x_m)$ coord. locali tali che

$$E_i := \varphi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \qquad i=1,2,\dots n$$

formino una <u>base locale</u> di Δ su U

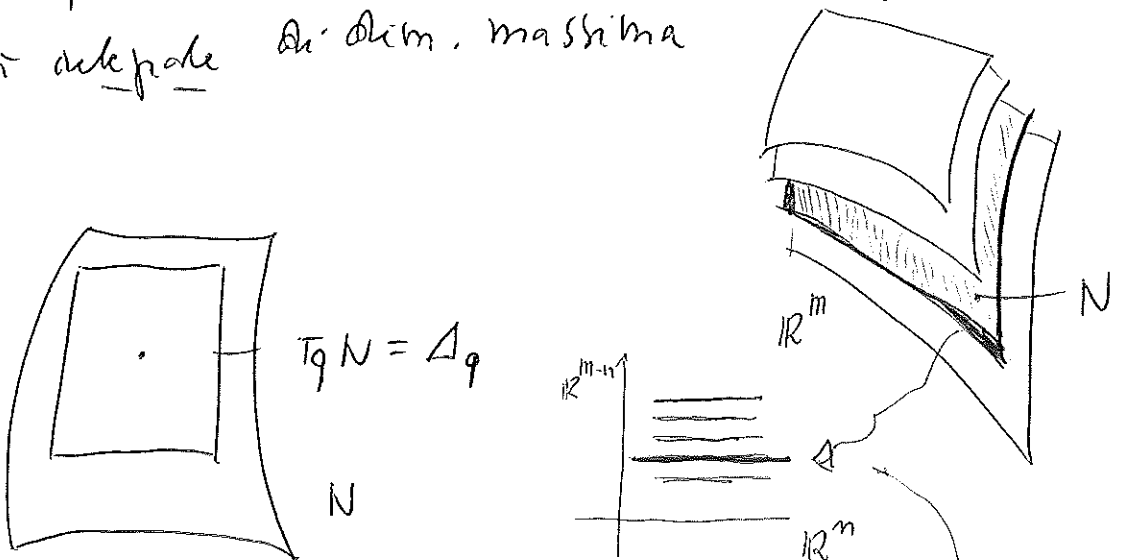
In questo caso $\exists$ N t. che $T_q N = \Delta_q$ $\forall q \in U$

(N dipende da q)

$$N = \{ x^i = a^i \quad i = n+1 \dots m \} = \varphi^{-1}\{ x \in \varphi(U) / x^j = a^j \quad j = n+1, \dots m \}$$

(a^i) coord. di q. è una fetta di U

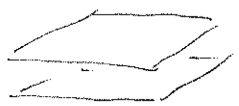
||| N s. <u>varietà integrale</u> di dim. massima



Si noti che $\{E_i\}$ è <u>involutoria</u>

$$[E_i, E_j] = \varphi_*^{-1} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]}_{=0} = 0$$

caso <u>tipico</u> di distribuzione involutoria: in $\mathbb{R}^m$:
$m = n+k$
$\Delta = \{ \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \}$



Teorema (Frobenius)

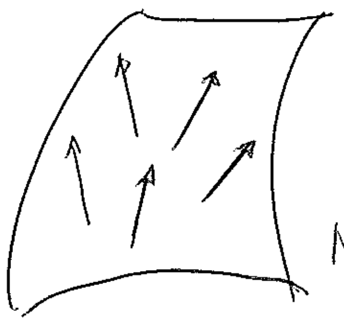
Δ è involutoria $\Longleftrightarrow$ Δ è completamente integrabile

(involutive) (completely integrable)

Commento: $(\Leftarrow)$ è chiara.

Si osservi pure che, data $N \subset M$ (sottovarietà di M)

$\mathfrak{X}(N)$ è un'algebra di Lie



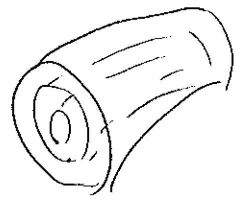
(la condizione è necessaria)

(crucial point) (sufficiency)

Il punto cruciale del teorema è la sufficienza.
Questa si può provare per induzione (by induction)

Si usa il fatto che una distribuzione involutoria può essere generata, pto per pto, da campi vettoriali commutanti.

Nota: si pensi al teorema di Liouville - Arnol'd



$\{f_i\}$ integrali primi in involuzione indipendenti $\sim X_{f_i}$

distribuzione completamente integrabile.

$N \sim$ Tori fissi

$\quad$ " $(\varphi_1 \dots \varphi_n, I_1 \dots I_n)$

$\Omega = (\omega_{ij})$

nelle variabili azione - angolo:

$$\Delta = \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right\}_{i=1,\dots,n}$$

$X_{I_i} = \Omega^T dI_i \qquad i_{X_I}\omega = dI$

$(d\varphi \wedge dI)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \cdot\right) = dI$

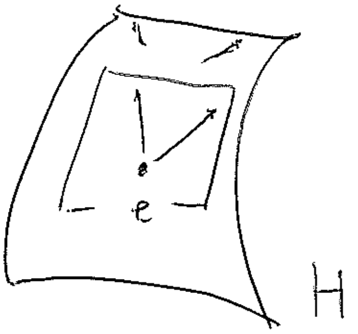
Esempio importantissimo

Sia G un gruppo di Lie (Lie group) $\quad \mathfrak{g}$ algebra di Lie di G
$\mathfrak{h}$ $\quad$ = di H

$H \subset G$ sottogruppo (di Lie)

$\mathfrak{h} = \{$campi vett. su G inv. a sinistra, tangenti ad H in $e\}$

G $\quad$ $\mathfrak{h}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g}$



Risulta individuata una Δ su G tale che

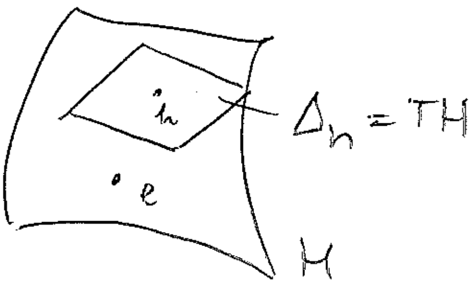
$$\Delta_h = T_h H$$

e in generale

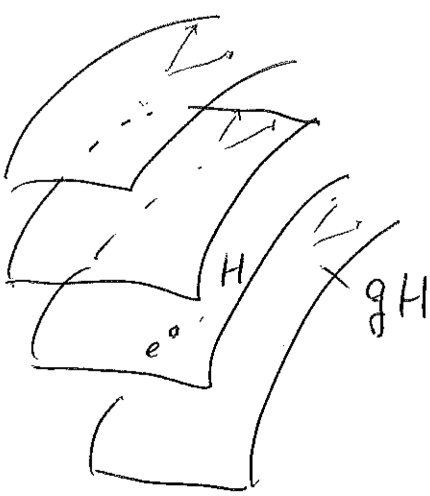
$$\boxed{\Delta_g = T_g(gH)}$$

sicché:

Δ è completamente integrabile: (Frobenius)



Le classi laterali gH costituiscono le varietà integrali di Δ



Se H è chiuso gH è embedded..
Si farà vedere che G/H è ancora una varietà