Università degli Studi di Verona Anno Accademico 2016-2017
CL in Matematica Applicata
Algebra

Foglio di Esercizi n°4 - 2/11/2016

(Da consegnare il giorno 9/11/2016)

Esercizio 1

Sia $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e sia dato il polinomio $f(X) = X^3 - 3X + 1$ in $K[X]$. Consideriamo l'anello quoziente $A = K[X]/(f)$.

1) È vero che A è un campo?

2) Quanti sono gli elementi di A?

3) Dire se $X^2 - X + 3 + (f)$ è un elemento invertibile di A e, in caso affermativo, determinarne l'inverso.

Esercizio 2

Discutere la riducibilità dei seguenti polinomi su $\mathbb{Q}$:

(i) $3X^5 + 18X^2 + 24X + 6$;

(ii) $7X^3 + 12X^2 + 3X + 45$;

(iii) $2X^{10} + 25X^3 + 10X^2 - 30$.

Esercizio 3

Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss consideriamo gli elementi $\alpha = -2 + 10i$ e $\beta = 9 + 7i$.

1) Determinare il massimo comune divisore di α e β appartenente al primo quadrante del piano di Gauss.

2) Sia I l'ideale di $\mathbb{Z}[i]$ generato da α e β. È vero che I è principale? In caso affermativo, determinarne un generatore.

3) Sia J l'ideale di $\mathbb{Z}[i]$ generato da α e sia $\gamma = -1 + 2i$. È vero che l'elemento $\gamma + J$ è invertibile in $\mathbb{Z}[i]/J$? In caso affermativo, determinarne l'inverso.