Appunti di Logica (m)

Giuseppe Spolaore

Nota introduttiva

Questi appunti sono intesi offrire un riassunto schematico delle regole, dei principi logici e delle tecniche principali introdotte nel corso. La loro lettura è consigliata soprattutto in fase di ripasso o per chi non ha familiarità con il testo raccomandato, ossia con J. Barwise *et al.*, *Language, Proof, and Logic*, CSLI, Stanford 2011 (d'ora in poi LPL per brevità). In ogni caso lo studio di questi appunti dovrebbe integrare, non sostituire, lo studio di uno dei libri di testo indicati nel programma dell'insegnamento.

1 Linguaggi FOL

FOL e LT

In LPL si parla genericamente di **linguaggi del primo ordine** (FOL, acronimo di *first order logic*), senza specificare un linguaggio in particolare. È bene comunque avere un'idea precisa di almeno un linguaggio della logica del primo ordine. A scopo puramente esemplificativo, considereremo il linguaggio dei blocchi di Tarski's world. Possiamo chiamarlo LT.

Enunciati

Iniziamo con un po' di terminologia. Gli **enunciati** sono frasi cui può essere attribuito un valore di verità. Ad esempio, sono enunciati 'Parmenide è famoso per aver sostenuto che tutto scorre' (falso) e 'Leibniz ha dato il suo nome ad alcune leggi dell'identità' (vero). Negli enunciati compaiono espressioni linguistiche, e in tal caso diremo che esse **occorrono** o hanno un'**occorrenza** nell'enunciato. Ad esempio, 'Gigi' ha un'occorrenza (occorre) in 'Gigi ama Maria'.

Enunciati atomici

Termini singolari e predicati

Gli **enunciati atomici** includono, intuitivamente, le frasi più semplici di un linguaggio (ad es. 'Gigi ama Maria', 'Gigi è veloce', 'Luciano gioca con il padre di Enrico'). Molti enunciati atomici sono formati da uno o più **termini singolari** (ad es. 'Gigi', 'il padre di Enrico') e da un **predicato** (ad es. 'ama', 'è veloce').

Costanti individuali e predicati di LT

In LT gli unici termini singolari sono le **costanti individuali** $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \ldots$, mentre i predicati sono espressioni che iniziano con la lettera maiuscola e includono, ad esempio, Cube, SameRow e Between (si veda più sotto per una lista completa). LT (come del resto FOL) comprende anche i quantificatori $\exists$ e $\forall$ e le variabili $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \ldots$. Di questi simboli ci occuperemo brevemente più sotto. Per il momento possiamo limitarci a considerare un frammento di LT in cui non essi non compaiono, e che chiameremo LT^-.

enunciati atomici di LT^-

Argomenti e arietà di un predicato

Un enunciato atomico di LT^- è costituito da un predicato giustapposto a uno o più termini separati da virgole e racchiusi tra parentesi tonde, come in Cube(a), SameRow(a, a) e Between(a, c, b). In tali enunciati i termini si dicono **argomenti** del predicato. Ad esempio in SameRow(a, b) a e b sono argomenti di SameRow. Accade che predicati diversi richiedano un numero diverso di argomenti. Ad esempio, Cube richiede uno e un solo argomento, LeftOf due e Between tre. Quel numero è detto l'**arietà** del predicato. Così, diremo che Cube ha arietà 1 (è unario), LeftOf arietà 2 (è binario) ecc. In generale, se $\mathsf{t}_1, \dots, \mathsf{t}_\mathsf{n}$ sono termini e Pred è un predicato di arietà n, allora $\mathsf{Pred}(\mathsf{t}_1, \dots, \mathsf{t}_\mathsf{n})$ è un enunciato atomico di LT^-. Secondo l'uso consolidato, il predicato di identità fa eccezione rispetto a questa sintassi e segue la cosiddetta **notazione infissa** $\mathsf{t}_1 = \mathsf{t}_2$.

Notazione infissa

Enunciati complessi

Connettivi

Gli enunciati atomici possono occorrere in enunciati più complessi. Ad esempio in 'Gigi ama Maria e Maria ama Gigi' occorrono due enunciati atomici, 'Gigi ama Maria' e 'Maria ama Gigi', e la congiunzione 'e'. Un ruolo simile a quello delle congiunzioni dell'italiano è svolto, in LT^-, LT e più in generale in FOL, dai **connettivi**. Ad esempio nell'enunciato complesso $(\mathsf{Cube}(\mathsf{a}) \land \mathsf{Between}(\mathsf{a}, \mathsf{c}, \mathsf{b}))$ occorrono gli enunciati atomici $\mathsf{Cube}(\mathsf{a})$ e $\mathsf{Between}(\mathsf{a}, \mathsf{c}, \mathsf{b})$, e il connettivo $\land$. Analogamente $\neg\mathsf{Cube}(\mathsf{a})$ è un enunciato complesso in cui occorrono il connettivo $\neg$ e l'enunciato atomico $\mathsf{Cube}(\mathsf{a})$. La **negazione** $\neg$ (intuitivamente: 'non si dà il caso che'), la **congiunzione** $\land$ ('e') e la **disgiunzione** $\lor$ ('o') si dicono **connettivi booleani** dal nome del logico inglese George Boole. Le regole sintattiche dei connettivi booleani sono molto semplici: se P e Q sono enunciati di LT, allora $\neg\mathsf{P}$, $(\mathsf{P} \land \mathsf{Q})$ e $(\mathsf{P} \lor \mathsf{Q})$ sono anch'essi enunciati di LT. Si noti che la negazione si applica ad un solo enunciato P per ottenere $\neg\mathsf{P}$ mentre gli altri connettivi booleani $\land$ e $\lor$ si applicano a due enunciati. Seguendo una comune terminologia, diremo dunque che $\neg$ è un connettivo **unario** mentre $\land$ e $\lor$ sono connettivi **binari**.

Connettivi booleani

Connettivi unari e binari

Negazioni, congiunzioni e disgiunzioni

Con le parole 'negazione', 'congiunzione' e 'disgiunzione' si indicano non solo certi connettivi ma anche il risultato dell'applicazione di quei connettivi. Così, ad es., diremo che $\neg\mathsf{Cube}(\mathsf{a})$ è una negazione, $(\mathsf{Cube}(\mathsf{a}) \land \mathsf{Cube}(\mathsf{b}))$ è una congiunzione e $(\mathsf{FrontOf}(\mathsf{a}, \mathsf{b}) \lor (\mathsf{Dodec}(\mathsf{b}))$ è una disgiunzione. Inoltre $\mathsf{Cube}(\mathsf{a})$ è l'enunciato **negato** in $\neg\mathsf{Cube}(\mathsf{a})$, $\mathsf{Cube}(\mathsf{a})$ e $\mathsf{Cube}(\mathsf{b})$ sono i **congiunti** in $(\mathsf{Cube}(\mathsf{a}) \land \mathsf{Cube}(\mathsf{b}))$, mentre $\mathsf{FrontOf}(\mathsf{a}, \mathsf{b})$ e $(\mathsf{Dodec}(\mathsf{b}))$ sono i **disgiunti** in $(\mathsf{FrontOf}(\mathsf{a}, \mathsf{b}) \lor (\mathsf{Dodec}(\mathsf{b})))$.

Condizionale e bicondizionale

Oltre ai connettivi booleani, LT include altri due connettivi, entrambi binari: il **condizionale** $\rightarrow$ ('se....allora') e il **bicondizionale** $\leftrightarrow$ ('se e solo se'). La sintassi di questi connettivi è identica a quella degli altri connettivi binari: se P e Q sono enunciati allora lo sono anche $(\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q})$ e $(\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q})$. Ancora, enunciati del tipo $(\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q})$ e $(\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q})$ si dicono, rispettivamente, condizionali e bicondizionali. In $(\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q})$ P è detto l'**antecedente** del condizionale e Q il **conseguente**. In $(\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q})$ P e Q si dicono rispettivamente il **lato sinistro** e il **lato destro** del bicondizionale.

Parentesi

Il ruolo delle parentesi che circondano gli enunciati è quello di evitare ambiguità, come avviene del resto nel linguaggio dell'aritmetica. Le nostre regole sintattiche ci obbligano tuttavia a introdurre molte più parentesi di quelle strettamente necessarie per evitare ambiguità. È bene dunque stipulare che le parentesi inutili possano essere omesse. In particolare, ometteremo sempre le parentesi più esterne delle formule, e le parentesi che separano due congiunzioni, due disgiunzioni, due condizionali o due bicondizionali consecutivi. Scriveremo così ad esempio $\mathsf{Cube}(\mathsf{a}) \land \mathsf{Cube}(\mathsf{b}) \land \mathsf{Cube}(\mathsf{c})$ al posto di $(\mathsf{Cube}(\mathsf{a}) \land (\mathsf{Cube}(\mathsf{b}) \land \mathsf{Cube}(\mathsf{c})))$.

Ecco di seguito in forma schematica la definizione del linguaggio LT^-: LT^-

Definizione 1 (LT^-)**.**

Vocabolario:

Costanti individuali: $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{e}, \mathsf{f}, \mathsf{n}_1, \mathsf{n}_2, \ldots$

Predicati:

Arietà 1: Cube, Tet, Dodec, Small, Medium, Large;

Arietà 2: Smaller, Larger, LeftOf, RightOf, BackOf, FrontOf, SameSize, SameShape, SameRow, SameCol, Adjoins, =;

Arietà 3: Between.

Parentesi: (,).

Connettivi: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow \leftrightarrow$.

Regole sintattiche:

1. Date le costanti $\mathsf{c}_1, \ldots, \mathsf{c}_\mathsf{n}$ e il predicato Pred di arietà n, $\mathsf{Pred}(\mathsf{c}_1, \ldots, \mathsf{c}_\mathsf{n})$ è un enunciato. Al posto di $= (\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2)$ si scrive $\mathsf{c}_1 = \mathsf{c}_2$ e al posto di $\neg \mathsf{c}_1 = \mathsf{c}_2$ si può scrivere $\mathsf{c}_1 \neq \mathsf{c}_2$.
2. Se P e Q sono enunciati, allora $\neg \mathsf{P}$, $(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q})$, $(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q})$, $(\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q})$ e $(\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q})$ sono enunciati. Le parentesi inutili si possono omettere.

Nient'altro è un enunciato atomico di LT^-.

Per comprendere la definizione di LT^- può essere utile considerare i seguenti esempi:

Enunciati di LT^-:

$\mathsf{Smaller}(\mathsf{a}, \mathsf{b})$
$((\mathsf{Tet}(\mathsf{a}) \wedge \mathsf{Tet}(\mathsf{b})) \wedge \mathsf{Dodec}(\mathsf{n}_3))$, o meglio: $\mathsf{Tet}(\mathsf{a}) \wedge \mathsf{Tet}(\mathsf{b}) \wedge \mathsf{Dodec}(\mathsf{n}_3)$
$\mathsf{Tet}(\mathsf{a}) \vee \neg \mathsf{Tet}(\mathsf{b})$
$\neg(\mathsf{SameShape}(\mathsf{a}, \mathsf{b}) \wedge \mathsf{a} = \mathsf{b})$
$\neg \mathsf{Between}(\mathsf{a}, \mathsf{n}_2, \mathsf{f}) \rightarrow (\mathsf{a} = \mathsf{b} \wedge (\mathsf{a} = \mathsf{b} \leftrightarrow \mathsf{FrontOf}(\mathsf{n}_2, \mathsf{f})))$

Formule che *non* sono enunciati di LT^-:

$\mathsf{SameShape}(\mathsf{a})$ [Predicato binario applicato a un solo termine];
$(\mathsf{a} \neq \mathsf{b})$ [Parentesi intorno a un enunciato in cui non occorrono connettivi binari];
$\neg(\mathsf{a} = \mathsf{b})$ [Come sopra];
$(\wedge \mathsf{RightOf}(\mathsf{a}, \mathsf{b}))$ [Connettivo binario applicato a un solo enunciato].
$\neg \mathsf{Between}(\mathsf{a}, \mathsf{n}_2, \mathsf{f}) \rightarrow (\mathsf{a} = \mathsf{b} \wedge (\mathsf{a} = \mathsf{b} \leftrightarrow \mathsf{FrontOf}(\mathsf{n}_2, \mathsf{f}))$ [Parentesi non chiusa; nb: nessun enunciato di LT ha un numero dispari di parentesi].

Gli altri linguaggi FOL di cui si occupa LPL hanno la stessa sintassi di LT, e ne differiscono per il loro vocabolario, in particolare per quanto riguarda i termini singolari e i predicati. Si possono anche costruire linguaggi FOL personalizzati, per la resa formale di (semplici) enunciati italiani. Ad esempio, per rendere una frase come 'Ugo ama Ann e Ann è inglese' possiamo introdurre ad hoc i predicati Ama e Inglese, e i termini ugo e ann (si noti che i predicati sono in maiuscolo e i termini singolari in minuscolo), e scrivere $\mathsf{Ama}(\mathsf{ugo}, \mathsf{ann}) \wedge \mathsf{Inglese}(\mathsf{ann})$. Linguaggi personalizzati

In quanto segue studieremo principalmente schemi di ragionamento che si basano solo sul significato dei connettivi logici. A tal fine, è più semplice utilizzare le **lettere proposizionali** $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \ldots$ al posto degli enunciati atomici di un linguaggio FOL. Scriveremo così, ad esempio:

Lettere proposizionali

(1) $\neg\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \wedge (\mathsf{B} \leftrightarrow \mathsf{C}))$

al posto di:

$$\neg\mathsf{Between}(\mathsf{a}, \mathsf{n}_2, \mathsf{f}) \to (\mathsf{a} = \mathsf{b} \wedge (\mathsf{a} = \mathsf{b} \leftrightarrow \mathsf{FrontOf}(\mathsf{n}_2, \mathsf{f})))$$

Ora, in un enunciato come (1) ricorrono diversi connettivi. Si può dunque avere il dubbio se (1) sia una negazione, un condizionale o un bicondizionale. Per sciogliere simili dubbi, è utile introdurre la nozione di **ambito** di un connettivo (in inglese *scope*). Come sappiamo, in un enunciato possono occorrere altri enunciati più piccoli. Ad esempio in $\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \wedge \mathsf{C})$ occorrono gli enunciati A, B e $\mathsf{B} \wedge \mathsf{C}$. In questo modo, un connettivo può occorrere allo stesso tempo in diversi enunciati. Nel nostro esempio $\wedge$ occorre sia in $\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \wedge \mathsf{C})$ sia in $\mathsf{B} \wedge \mathsf{C}$. Ebbene, l'ambito di un connettivo è il più piccolo enunciato nel quale il connettivo occorre. Il **connettivo principale** di un enunciato è il connettivo che ha come ambito l'intero enunciato. Così ad esempio in $\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \wedge \mathsf{C})$ il connettivo principale è il condizionale, perché il più piccolo enunciato in cui $\to$ occorre è l'intero enunciato. Detta diversamente: $\to$ non occorre in nessuno degli enunciati più piccoli che hanno un'occorrenza in $\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \wedge \mathsf{C})$, e in particolare né in A, né in B, né in $\mathsf{B} \wedge \mathsf{C}$. A scanso di equivoci, è utile notare che $\mathsf{A} \to (\mathsf{B}$ *non* è un enunciato.

Ambito

Connettivo principale

Di regola il connettivo principale dà il nome all'intero enunciato: una negazione è un enunciato che ha come connettivo principale una negazione, una congiunzione un enunciato che ha come connettivo principale una congiunzione, eccetera. Ora possiamo tornare al nostro enunciato di partenza (1), ossia $\neg\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \wedge (\mathsf{B} \leftrightarrow \mathsf{C}))$, e osservare che si tratta di un condizionale, perché il connettivo principale è $\to$. Per dovere di cronaca, si può anche notare che l'ambito di $\neg$ è A, l'ambito di $\wedge$ è $\mathsf{B} \wedge (\mathsf{B} \leftrightarrow \mathsf{C})$ e l'ambito di $\leftrightarrow$ è $\mathsf{B} \leftrightarrow \mathsf{C}$.

Fin qui abbiamo considerato solo enunciati in cui ciascun connettivo occorre al più una volta. Ma cosa succede quando un connettivo ha più occorrenze all'interno di un medesimo enunciato, come in $\neg\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \to \mathsf{C})$? Ebbene, per dar conto di questi casi è necessario parlare di ambito di un'*occorrenza* di connettivo anziché – come abbiamo fatto finora – di ambito di un connettivo. Così diremo che in $\neg\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \to \mathsf{C})$ l'ambito della prima occorrenza (quella più a sinistra) di $\to$ è l'intera formula e l'ambito della seconda occorrenza è $(\mathsf{B} \to \mathsf{C})$. Nel caso della negazione specificare di quale occorrenza stiamo parlando è superfluo, perciò diremo semplicemente che l'ambito di $\neg$ è A. Il connettivo principale (o, se si vuole, l'occorrenza di connettivo principale) è naturalmente la prima occorrenza di $\to$.

Occorrenze

2 Semantica e tautologie

Nella semantica standard per FOL, gli enunciati atomici, e di conseguenza anche le lettere proposizionali $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots$ che useremo abitualmente al posto di enunciati atomici, sono tutti dotati di **valore di verità**. I valori di verità sono due: **il vero** (abbr. T dall'inglese *true*) e **il falso** (abbr. F). L'abbinamento di ciascuna lettera proposizionale del linguaggio a un valore di verità si dice

Valori di verità

assegnazione di valori di verità. Intuitivamente un'assegnazione di valori di verità può essere concepita come un certo modo in cui le cose potrebbero stare, una situazione o mondo possibile.

Connettivi e funzioni di verità

A ciascun connettivo corrisponde una regola che permette di determinare, dati i valori di verità degli enunciati cui il connettivo si applica, il valore di verità degli enunciati risultanti. Di conseguenza il valore di verità di un enunciato complesso è funzione del valore di verità degli enunciati atomici che vi occorrono. Per questa ragione i connettivi logici si dicono **vero-funzionali**. Ad esempio la regola corrispondente al connettivo '$\wedge$' dice che una congiunzione $\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}$ è vera se entrambi i congiunti P e Q sono veri, ed è falsa altrimenti. In modo più pratico per molti scopi, questa regola può essere espressa mediante la seguente tabella:

P	Q	$\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Qui P e Q sono enunciati qualunque, non necessariamente enunciati atomici; le prime due colonne indicano tutti i valori di verità che, al più, P e Q possono avere; la terza indica i corrispondenti valori di $\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}$. Questa tavola ci permette di calcolare il valore di verità di tutte le congiunzioni di cui sia noto il valore dei congiunti. Ad es. data un'assegnazione che abbina il vero (ossia T) alla lettera proposizionale A e abbina F alla lettera B, possiamo stabilire che $\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}$ è falsa (ossia che il suo valore è F) in quell'assegnazione. Una volta stabilito questo, possiamo anche stabilire che $(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \wedge \mathsf{A}$ è falsa in quell'assegnazione, e così via.

Ecco le tabelle corrispondenti agli altri connettivi:

P	$\neg\mathsf{P}$
T	F
F	T

P	Q	$\mathsf{P} \to \mathsf{Q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P	Q	$\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

È possibile dimostrare che, data un'assegnazione e date queste regole, è dato anche il valore di verità di *tutti* gli enunciati, benché, certo, sia umanamente impossibile scoprirlo. Un esempio potrà chiarire come mai (la dimostrazione è al di là degli scopi del corso). Supponiamo che il valore della lettera proposizionale A sia T e il valore della lettera proposizionale B sia F in una certa assegnazione, e consideriamo l'enunciato

(1) $\neg((\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \vee (\mathsf{A} \to \mathsf{B}))$

Assieme allo stesso (1), i seguenti sono tutti e solo gli enunciati che hanno un'occorrenza in (1)

(2) A

(3) B

(4) $\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}$

(5) $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$

(6) $(\mathsf{A} \land \mathsf{B}) \lor (\mathsf{A} \to \mathsf{B})$

Poiché i valori di verità di (2) e (3) sono dati (T e F rispettivamente), sono dati anche i valori di verità di (4) e (5) (F per entrambi). Dati i valori di verità di (4) e (5), è dato anche il valore di (6) (di nuovo F). Infine, dato il valore di (6) è dato anche il valore di (1) (ossia T).

Più concisamente, le relazioni tra i valori di verità di (1) e degli altri enunciati che vi ricorrono possono essere espresse attraverso la seguente tabella:

A	B	$\mathsf{A} \land \mathsf{B}$	$\mathsf{A} \to \mathsf{B}$	$(\mathsf{A} \land \mathsf{B}) \lor (\mathsf{A} \to \mathsf{B})$	$\neg((\mathsf{A} \land \mathsf{B}) \lor (\mathsf{A} \to \mathsf{B}))$
T	F	T	F	F	T

o, in modo ancora più compatto, così:

A	B	$\neg$	(	$(\mathsf{A} \land \mathsf{B})$	$\lor$	$(\mathsf{A} \to \mathsf{B})$	)
T	F	T		F	F	F	

In quest'ultima tabella, il valore dell'intero enunciato è quello che compare sotto il suo connettivo principale, qui $\neg$. Poiché in ultima analisi quello che intendevamo trovare era il valore di verità dell'intero enunciato, e non il modo in cui quel valore è stato individuato mediante l'individuazione del valore degli enunciati che vi ricorrono, possiamo anche limitarci a scrivere

A	B	$\neg((\mathsf{A} \land \mathsf{B}) \lor (\mathsf{A} \to \mathsf{B}))$
T	F	T

In logica, usualmente, non si è interessati ai valori di verità di un enunciato in una specifica assegnazione, quanto piuttosto ai valori di verità che l'enunciato *può* avere. A questo fine, si assume che vi sia un'assegnazione per ciascuna possibile combinazione di valori di verità delle lettere proposizionali. Poi si considerano tutti i diversi valori che l'enunciato assume in diverse assegnazioni. Ad es., la tabella completa dei possibili valori di verità di $\neg((\mathsf{A} \land \mathsf{B}) \lor (\mathsf{A} \to \mathsf{B}))$ appare così:

A	B	$\neg((\mathsf{A} \land \mathsf{B}) \lor (\mathsf{A} \to \mathsf{B}))$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

D'ora in poi, parleremo di **tavole di verità** per indicare tabelle in cui compaiono, alla prima riga, le lettere proposizionali (o gli enunciati atomici di FOL) che ricorrono in uno o più enunciati seguite da quegli stessi enunciati e, alle altre righe, tutti i diversi valori di verità che lettere ed enunciati assumono in diverse assegnazioni.

Si dicono **tautologie** o **enunciati tautologici** gli enunciati veri in ogni assegnazione, ad es. Tautologie

P	$\mathsf{P} \to \mathsf{P}$
T	T
F	T

P	Q	$(P \wedge Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

P	Q	R	$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

In LPL sono detti **enunciati TT-contraddittori** (ma si possono indicare più semplicemente come enunciati contraddittori) gli enunciati falsi in ogni assegnazione, ad es.

Enunciati TT-contraddittori

P	$\neg P \wedge P$
T	F
F	F

P	Q	$(P \wedge \neg Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	R	$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge \neg R)$
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

In LPL si dicono **TT-possibili** gli enunciati che sono veri per qualche assegnazione. Naturalmente, tutte le tautologie sono TT-possibili.

Esercizio 1: Scrivere la tavola di verità dei seguenti e precisare se si tratta di enunciati tautologici, TT-contraddittori o TT-possibili.

1.1 $P \leftrightarrow \neg P$

1.2 $P \wedge \neg Q \rightarrow P$

1.3 $P \vee Q \rightarrow P$

1.4 $P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow P))$

3 Conseguenza logica e tautologica

Intuitivamente, il seguente argomento è ‘buono’:

(1) È caldo
Piove.
Dunque, è caldo e piove.

Invece, il seguente è ‘cattivo’:

(2) È caldo.
Dunque, piove.

Per stabilire se un argomento è ‘buono’ o ‘cattivo’, possiamo procedere come segue. Innanzitutto chiediamoci se è possibile che tutte le premesse dell’argomento siano vere. Se la risposta è no, l’argomento è ‘buono’. Altrimenti, chiediamoci se, posto che tutte le premesse siano vere, è possibile che la conclusione sia falsa. Se la risposta è sì, allora l’argomento è ‘cattivo’, se la risposta è no l’argomento è ‘buono’. Ad esempio, nel caso di (2) si possono dare situazioni in cui tutte le premesse, in questo caso l’unica premessa, è vera. Nulla vieta che sia caldo. Dunque, la risposta alla prima domanda è sì. Adesso dobbiamo chiederci se in almeno alcune di tali situazioni possibili la conclusione sia falsa. La risposta è di nuovo affermativa. Ci sono certamente situazioni possibili in cui è caldo ma non piove. Possiamo quindi concluderne che (2) è ‘cattivo’, in accordo con le intuizioni. Nell’altro esempio, (1), le cose vanno diversamente. Certo, la risposta alla prima domanda è ancora sì, perché possono ben darsi situazioni in cui è vero sia che piove sia che è caldo. E tuttavia, in nessuna di tali situazioni possibili è falso che piove ed è caldo, e quindi la risposta alla seconda domanda è no. Possiamo concluderne che (1) è ‘buono’.

Validità e conseguenza logica

Un argomento ‘buono’ in questo senso si dice **logicamente valido**, un argomento ‘cattivo’ **invalido**. Un argomento è logicamente valido quando la sua conclusione è **conseguenza logica** (dell’insieme) delle premesse, dove la nozione di conseguenza logica può essere definita così:

Definizione 2 (Conseguenza logica)**.** L’enunciato P è conseguenza logica di un insieme di enunciati $\mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_\mathsf{n} =_{\mathsf{df.}}$ non è logicamente possibile che $\mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_\mathsf{n}$ siano tutti veri e P sia falso.

Conseguenza tautologica

Attraverso la semantica presentata all’inizio del paragrafo è possibile individuare alcuni argomenti validi, quelli la cui validità dipende, intuitivamente, dal significato dei connettivi. Li possiamo chiamare argomenti **tautologicamente validi**. Si tratta di argomenti la cui conclusione è **conseguenza tautologica** (dell’insieme) delle premesse, dove la nozione di conseguenza tautologica si può definire così:

Definizione 3 (Conseguenza tautologica)**.** L’enunciato P è conseguenza tautologica di un insieme di enunciati $\mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_\mathsf{n} =_{\mathsf{df.}}$ in nessuna assegnazione $\mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_\mathsf{n}$ sono tutti veri e P è falso.

Utilizzando le tavole di verità, possiamo verificare se un argomento è o no tautologicamente valido. È sufficiente scrivere la tavola di verità di tutte le premesse e della conclusione, e poi controllare se, per almeno una riga, tutte le premesse sono vere e la conclusione falsa. Consideriamo ad es. gli argomenti $\mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \vdash \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ e $\mathsf{A} \vee \mathsf{B} \vdash \mathsf{A} \to \mathsf{B}$:

A	B	A ∧ B	A → B
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

	A	B	A ∨ B	A → B
	T	T	T	T
⇒	T	F	T	F
	F	T	T	T
	F	F	F	T

Il primo è (tautologicamente) valido, poiché per nessuna assegnazione $\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}$ è vero e $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ falso. Il secondo non lo è: data un'assegnazione in cui il valore di A è T e il valore di B è F, $\mathsf{A} \vee \mathsf{B}$ è vero e $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ falso. In modo analogo, possiamo stabilire che $\neg\mathsf{A}, \neg\neg\mathsf{A} \vdash \neg\mathsf{B}$ è valido, mentre $\neg\mathsf{A}, \mathsf{A} \to \mathsf{B} \vdash \mathsf{A} \vee \mathsf{B}$ non lo è:

A	B	¬A	¬¬A	¬B
T	T	F	T	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	F	T

	A	B	¬A	A → B	A ∨ B
	T	T	F	T	T
	T	F	F	F	T
	F	T	T	T	T
⇒	F	F	T	T	F

Conseguenze di un insieme vuoto di premesse

La nostra definizione di conseguenza tautologica non esclude la possibilità di un insieme *vuoto* di premesse. In particolare, essa implica che un enunciato è conseguenza tautologica di un insieme vuoto di premesse se e solo se è una tautologia.

Equivalenza logica e tautologica

Due enunciati sono **logicamente equivalenti** se e solo se non è possibile che uno dei due sia vero e l'altro falso, ossia se e solo se non è possibile che abbiano un valore di verità differente. Due enunciati sono **tautologicamente equivalenti** quando hanno lo stesso valore di verità in tutte le assegnazioni. È facile constatare che due enunciati sono logicamente/tautologicamente equivalenti se e solo se ciascuno è conseguenza logica/tautologica dell'altro.

Esercizio 2: Stabilire con il metodo delle tavole di verità se i seguenti argomenti sono tautologicamente validi:

2.1 $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C} \vdash (\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \to \mathsf{C}$

2.2 $\mathsf{A}, \mathsf{B} \vdash \mathsf{A} \vee \mathsf{B}$

2.3 $\mathsf{A} \vdash \mathsf{A} \wedge (\mathsf{B} \vee \mathsf{A})$

4 Equivalenze notevoli e forme normali

Quanto segue sono alcune equivalenze tautologiche particolarmente interessanti. Il segno $\Leftrightarrow$ indica equivalenza logica e non va confuso con il bicondizionale $\leftrightarrow$. P e Q sono enunciati *qualunque* di (un linguaggio) FOL – e dunque *non* soltanto enunciati atomici di FOL.

Doppia negazione: $\mathsf{P} \Leftrightarrow \neg\neg\mathsf{P}$

Leggi di de Morgan: $\neg(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) \Leftrightarrow \neg\mathsf{P} \vee \neg\mathsf{Q}$
$\neg(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) \Leftrightarrow \neg\mathsf{P} \wedge \neg\mathsf{Q}$

Equivalenze dei condizionali: $\begin{array}{l} \mathsf{P} \to \mathsf{Q} \Leftrightarrow \neg\mathsf{P} \lor \mathsf{Q} \\ \mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q} \Leftrightarrow (\mathsf{P} \to \mathsf{Q}) \land (\mathsf{Q} \to \mathsf{P}) \end{array}$

Associatività: $\begin{array}{l} \mathsf{P} \land (\mathsf{Q} \land \mathsf{R}) \Leftrightarrow (\mathsf{P} \land \mathsf{Q}) \land \mathsf{R} \Leftrightarrow \mathsf{P} \land \mathsf{Q} \land \mathsf{R} \\ \mathsf{P} \lor (\mathsf{Q} \lor \mathsf{R}) \Leftrightarrow (\mathsf{P} \lor \mathsf{Q}) \lor \mathsf{R} \Leftrightarrow \mathsf{P} \lor \mathsf{Q} \lor \mathsf{R} \end{array}$

Idempotenza: $\begin{array}{l} \mathsf{P} \land \mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{P} \\ \mathsf{P} \lor \mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{P}. \end{array}$

Commutatività: $\begin{array}{l} \mathsf{P} \land \mathsf{Q} \Leftrightarrow \mathsf{Q} \land \mathsf{P} \\ \mathsf{P} \lor \mathsf{Q} \Leftrightarrow \mathsf{Q} \lor \mathsf{P}. \end{array}$

Distributività: $\begin{array}{l} \mathsf{P} \land (\mathsf{Q} \lor \mathsf{R}) \Leftrightarrow (\mathsf{P} \land \mathsf{Q}) \lor (\mathsf{P} \land \mathsf{R}) \\ \mathsf{P} \lor (\mathsf{Q} \land \mathsf{R}) \Leftrightarrow (\mathsf{P} \lor \mathsf{Q}) \land (\mathsf{P} \lor \mathsf{R}) \end{array}$

Sostituzioni di equivalenti

Se due enunciati logicamente/tautologicamente equivalenti sono sostituiti l'un l'altro all'interno di un enunciato più grande, l'enunciato originale e quello così ottenuto sono tra loro logicamente/tautologicamente equivalenti. Ad esempio, se all'interno dell'enunciato $\mathsf{A} \land \mathsf{B}$ sostituiamo A con il tautologicamente equivalente $\neg\neg\mathsf{A}$, il risultante enunciato $\neg\neg\mathsf{A} \land \mathsf{B}$ è a sua volta tautologicamente equivalente all'enunciato di partenza $\mathsf{A} \land \mathsf{B}$. Questa importante proprietà dell'equivalenza logica e tautologica è enunciata nel seguente:

Principio di sostituzione degli equivalenti logici/tautologici Si scriva $\mathsf{P}(\mathsf{Q})$ per indicare che in P occorre l'enunciato Q e si scriva $\mathsf{P}(\mathsf{R})$ per il risultato della sostituzione di Q con R in P; ebbene, se $\mathsf{Q} \Leftrightarrow \mathsf{R}$ allora $\mathsf{P}(\mathsf{Q}) \Leftrightarrow \mathsf{P}(\mathsf{R})$.

Forma normale negativa (FNN)

Questo principio, le leggi della doppia negazione e di de Morgan, e le equivalenze C permettono, in linea di principio, di ottenere da un qualunque enunciato del linguaggio un enunciato tautologicamente equivalente in cui non compaiono condizionali o bicondizionali, e in cui le negazioni si applicano al più a enunciati atomici. Enunciati di questo tipo si dicono in **forma normale negativa** (FNN). Qualche esempio potrà aiutare. Iniziamo con l'enunciato $\neg(\mathsf{A} \land \mathsf{B}) \land \mathsf{C}$, che chiaramente *non* è in FNN. Dato il principio di sostituzione, poiché $\neg(\mathsf{A} \land \mathsf{B}) \Leftrightarrow \neg\mathsf{A} \lor \neg\mathsf{B}$ (de Morgan), $\neg(\mathsf{A} \land \mathsf{B}) \land \mathsf{C}$ è tautologicamente equivalente a:

$$(\neg\mathsf{A} \lor \neg\mathsf{B}) \land \mathsf{C}$$

che *è* in FNN. Un caso leggermente più complesso è il seguente:

$$\neg(\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \lor \neg(\mathsf{A} \lor \mathsf{B}).$$

Qui abbiamo bisogno passare attraverso un certo numero di equivalenze tautologiche per arrivare a un enunciato in FNN. Ecco i vari passi, ciascuno con a fianco indicata la legge logica che lo autorizza, e con gli enunciati sostituiti sottolineati:

$$\begin{array}{rcll} \neg(\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \lor \neg(\mathsf{A} \lor \mathsf{B}) & \Leftrightarrow & \neg\underline{(\neg\mathsf{A} \lor \mathsf{B})} \lor \neg(\mathsf{A} \lor \mathsf{B}) & \text{eq. dei cond.} \\ & \Leftrightarrow & \underline{(\neg\neg\mathsf{A} \land \neg\mathsf{B})} \lor \neg(\mathsf{A} \lor \mathsf{B}) & \text{de Morgan} \\ & \Leftrightarrow & (\underline{\mathsf{A}} \land \neg\mathsf{B}) \lor \neg(\mathsf{A} \lor \mathsf{B}) & \text{doppia negazione} \\ & \Leftrightarrow & (\mathsf{A} \land \neg\mathsf{B}) \lor \underline{(\neg\mathsf{A} \land \neg\mathsf{B})} & \text{de Morgan} \end{array}$$

In modo analogo, le leggi di commutatività e di distributività permettono, in linea di principio, di ottenere da un qualunque enunciato in FNN un enunciato in FNN in cui le disgiunzioni si applicano al più a enunciati atomici e/o loro negazioni. Simili enunciati si dicono in **forma normale congiuntiva** (FNC avete letto bene: forma normale *congiuntiva*). Analogamente, si dicono in **forma normale disgiuntiva** (FND) gli enunciati in FNN in cui le congiunzioni si applicano al più enunciati atomici (lettere proposizionali) e/o loro negazioni. Una definizione equivalente alternativa di FNC e FND è la seguente:

Definizione 4 (Forme normali)**.** Gli enunciati atomici (lettere proposizionali) e le loro negazioni si dicono **letterali**. Indichiamo come **congiunzione/disgiunzione di un solo enunciato** un enunciato che non ha la congiunzione/disgiunzione come connettivo principale (ad es. $A \land B$ è la disgiunzione di un solo enunciato, così come $A \lor \neg B$ è la congiunzione di un solo enunciato).

- Un enunciato è in FNC se e solo se è la congiunzione di una o più disgiunzioni di uno o più letterali.
- Un enunciato è in FND se e solo se è la disgiunzione di una o più congiunzioni di uno o più letterali.

Questa definizione implica che i seguenti sono sia in FNC sia in FND:

A; $A \lor \neg B$; $A \land B$; $\neg A \land B$; $A \land B \land \neg C$; $A \lor B \lor \neg C$;

che i seguenti sono in FNC ma non in FND:

$A \land (B \lor C)$; $(A \lor \neg B) \land (\neg A \lor B)$; $A \land B \land C \land (A \lor C) \land D \land \neg E$;

che i seguenti sono in FND ma non in FNC:

$A \lor (B \land C)$; $(A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)$; $A \lor B \lor C \lor (A \land C) \lor D \lor \neg E$.

e infine che i seguenti non sono né in FNC né in FND:

$\neg\neg A$; $A \land \neg\neg B$; $A \lor \neg(B \lor C)$; $A \to B$; $A \land (B \lor (A \land B))$.

5 Calcolo

Ecco in forma schematica le regole del calcolo proposizionale $\mathcal{F}_T$ introdotto in LPL, con l'aggiunta delle regole di introduzione ed eliminazione dell'identità. $P, P_1, \ldots, P_n, Q$ sono enunciati *qualunque* di FOL – e dunque *non* soltanto enunciati atomici. Il simbolo $\triangleright$ indica il passo cui la regola si applica, la doppia freccia $\circlearrowleft$ segnala che l'ordine relativo di due enunciati all'interno della prova è irrilevante. L'ordine relativo degli enunciati indicati come P_1, P_2, ..., P_i, ..., P_n è sempre irrilevante, tanto all'interno degli enunciati in cui occorrono, tanto all'interno della prova. Il simbolo $\Downarrow$ segnala che tutti gli enunciati da P_1 a P_n devono figurare (non necessariamente in quest'ordine).

Reiterazione:

$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ & P \\ & \vdots \\ \triangleright & P \end{array}$$

$\perp$ Intro:

$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ & P \\ & \vdots \\ & \neg P \\ & \vdots \\ \triangleright & \perp \end{array}$$

$\perp$ Elim:

$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ & \perp \\ & \vdots \\ \triangleright & P \end{array}$$

$\neg$ **Intro:**
$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ & \begin{array}{|l} \mathsf{P} \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array} \\ & \vdots \\ \rhd & \neg \mathsf{P} \end{array} \quad .$$

$\neg$ **Elim:**
$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ & \neg\neg \mathsf{P} \\ & \vdots \\ \rhd & \mathsf{P} \end{array}$$

$\wedge$ **Intro:**
$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ & \mathsf{P}_1 \\ \Downarrow & \vdots \\ & \mathsf{P}_n \\ & \vdots \\ \rhd & \mathsf{P}_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_n \end{array}$$

$\wedge$ **Elim:**
$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ & \mathsf{P}_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_n \\ & \vdots \\ \rhd & \mathsf{P}_i \ \text{[dove } \mathsf{P}_i \text{ è uno tra } \mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n\text{]} \end{array}$$

$\vee$ **Intro:**
$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ & \mathsf{P}_i \\ & \vdots \\ \rhd & \mathsf{P}_1 \vee \cdots \vee \mathsf{P}_n \\ & \text{[dove } \mathsf{P}_i \text{ è uno} \\ & \text{tra } \mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n\text{]} \end{array}$$

$\vee$ **Elim:**
$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ & \mathsf{P}_1 \vee \cdots \vee \mathsf{P}_n \\ & \vdots \\ & \begin{array}{|l} \mathsf{P}_1 \\ \hline \vdots \\ \mathsf{Q} \end{array} \\ \Downarrow & \vdots \\ & \begin{array}{|l} \mathsf{P}_n \\ \hline \vdots \\ \mathsf{Q} \end{array} \\ & \vdots \\ \rhd & \mathsf{Q} \end{array} \quad .$$

$\rightarrow$ **Intro:**
$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ & \begin{array}{|l} \mathsf{P} \\ \hline \vdots \\ \mathsf{Q} \end{array} \\ & \vdots \\ \rhd & \mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q} \end{array}$$

$\rightarrow$ **Elim:**
$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ & \mathsf{P} \\ & \vdots \\ & \mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q} \\ & \vdots \\ \rhd & \mathsf{Q} \end{array}$$

$\leftrightarrow$ **Intro:**
$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ & \begin{array}{|l} \mathsf{P}_1 \\ \hline \vdots \\ \mathsf{P}_2 \end{array} \\ & \vdots \\ & \begin{array}{|l} \mathsf{P}_2 \\ \hline \vdots \\ \mathsf{P}_1 \end{array} \\ & \vdots \\ \rhd & \mathsf{P}_1 \leftrightarrow \mathsf{P}_2 \end{array}$$

$\leftrightarrow$ **Elim:**
$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ & \mathsf{P}_1 \leftrightarrow \mathsf{P}_2 \\ & \vdots \\ & \mathsf{P}_1 \\ & \vdots \\ \rhd & \mathsf{P}_2 \end{array}$$

= Intro:

$$\begin{array}{l|ll} & \vdots & \\ \triangleright & \mathsf{n} = \mathsf{n} & \text{dove } \mathsf{n} \text{ è una costante individuale qualunque.} \end{array}$$

= Elim:

$$\begin{array}{l|ll} & \vdots & \\ & \mathsf{n} = \mathsf{m} & \text{dove } \mathsf{n} \text{ e } \mathsf{m} \text{ sono costanti individuali qualunque} \\ & \vdots & \\ & \mathsf{Q(n)} & \text{dove } \mathsf{Q(n)} \text{ è un qualunque enunciato } \mathsf{Q} \text{ in cui occorre } \mathsf{n} \\ & \vdots & \\ \triangleright & \mathsf{Q(m)} & \text{dove } \mathsf{Q(m)} \text{ è il risultato della sostituzione di } \mathsf{n} \text{ con } \mathsf{m} \text{ in } \mathsf{Q}. \end{array}$$

6 Esempi

Ecco qualche esempio di prova formale nel calcolo $\mathcal{F}$.

(1) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$

$$\begin{array}{r|l|l|l} 1 & \underline{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)} & & \\ 2 & & \underline{A \wedge B} & \\ 3 & & A & \wedge \text{ Elim: } 2 \\ 4 & & B & \wedge \text{ Elim: } 2 \\ 5 & & B \vee C & \vee \text{ Intro: } 4 \\ 6 & & A \wedge (B \vee C) & \wedge \text{ Intro: } 3, 5 \\ 7 & & \underline{A \wedge C} & \\ 8 & & A & \wedge \text{ Elim: } 7 \\ 9 & & C & \wedge \text{ Elim: } 7 \\ 10 & & B \vee C & \vee \text{ Intro: } 9 \\ 11 & & A \wedge (B \vee C) & \wedge \text{ Intro: } 8, 10 \\ 12 & A \wedge (B \vee C) & & \vee \text{ Elim: } 1, 2\text{–}6, 7\text{–}11 \end{array}$$

(2) $\neg A \to (B \to C) \vdash (A \to B) \to (A \to C)$

$$\begin{array}{r|l|l|l|l} 1 & \underline{A \to (B \to C)} & & & \\ 2 & & \underline{A \to B} & & \\ 3 & & & \underline{A} & \\ 4 & & & B \to C & \to \text{ Elim: } 1, 3 \\ 5 & & & B & \to \text{ Elim: } 2, 3 \\ 6 & & & C & \to \text{ Elim: } 4, 5 \\ 7 & & A \to C & & \to \text{ Intro: } 3\text{–}6 \\ 8 & (A \to B) \to (A \to C) & & & \to \text{ Intro: } 2\text{–}7 \end{array}$$

(3) $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$[1]

1	$\neg(A \wedge B)$	
2	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	
3	$\neg A$	
4	$\neg A \vee \neg B$	$\vee$ Intro: 3
5	$\bot$	$\bot$ Intro: 2, 4
6	$\neg\neg A$	$\neg$ Intro: 3–5
7	A	$\neg$ Elim: 6
8	B	
9	$A \wedge B$	$\wedge$ Intro: 7, 8
10	$\bot$	$\bot$ Intro: 1, 9
11	$\neg B$	$\neg$ Intro: 8–10
12	$\neg A \vee \neg B$	$\vee$ Intro: 11
13	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	Reit: 2
14	$\bot$	$\bot$ Intro: 12, 13
15	$\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$	$\neg$ Intro: 2–14
16	$\neg A \vee \neg B$	$\neg$ Elim: 15

(4) $A \leftrightarrow \neg A \vdash B$

1	$A \leftrightarrow \neg A$	
2	A	
3	$\neg A$	$\leftrightarrow$ Elim: 1, 2
4	$\bot$	$\bot$ Intro: 2, 3
5	$\neg A$	$\neg$ Intro: 2–4
6	A	$\leftrightarrow$ Elim: 1, 5
7	$\bot$	$\bot$ Intro: 5, 6
8	B	$\bot$ Elim: 7

[1] In questa prova il passo 13 è pleonastico ed è stato introdotto solo per illustrare la regola di reiterazione. È possibile ometterlo e riferirsi direttamente alla coppia contraddittoria 2, 12 nella successiva applicazione di $\bot$ Intro.

(5) $a = b \vdash Cube(a) \leftrightarrow Cube(b)$[2]

1	$a = b$	
2	$\quad$ Cube(a)	
3	$\quad$ Cube(b)	= Elim: 1, 2
4	$a = a$	= Intro
5	$b = a$	= Elim: 1, 4
6	$\quad$ Cube(b)	
7	$\quad$ Cube(a)	= Elim: 5, 6
8	$Cube(a) \leftrightarrow Cube(b)$	$\leftrightarrow$ Intro: 2-3, 6-7

7 Cenni sulla traduzione in FOL

FOL è più ricco rispetto al nostro mini linguaggio LT^{-}, se non altro perché il suo vocabolario contiene più simboli primitivi. In particolare esso include:

Variabili: x, y, z ecc.

Il quantificatore esistenziale $\exists$.

Il quantificatore universale $\forall$.

FOL permette di studiare dal punto di vista logico argomenti come i seguenti:

Nico è un gatto.	Nico è un gatto ed è furbo.
Tutti i gatti sono furbi.	(Dunque) qualche gatto è furbo.
(Dunque) Nico è furbo.	

A questo fine, è importante individuare un corrispettivo, una 'traduzione formale', di proposizioni dell'italiano in un linguaggio FOL.

Sappiamo già come tradurre enunciati atomici quali 'Nico è furbo' e enunciati complessi quali 'Nico è un gatto e (Nico) è furbo', ossia rispettivamente come Furbo(nico) e Gatto(nico) $\wedge$ Furbo(nico). Ora occupiamoci delle espressioni 'Qualche'
'qualche'/'almeno uno' e simili. Poniamo che qualcuno ci dica che qualche gatto è furbo. Per verificare la sua affermazione, basta trovare almeno un ente che è un gatto ed è furbo; per falsificarla bisogna mostrare che è falso che almeno un ente sia un gatto e sia furbo. Dunque, 'Qualche gatto è furbo' è equivalente a 'Almeno un ente è un gatto ed è furbo'. Sostituendo, per ragioni di brevità e perspicuità, 'ente' con una variabile, ad es. x, otteniamo

> Almeno un x è tale che x è un gatto e x è furbo.

Adesso possiamo applicare a 'x è un gatto e x è furbo' lo stesso stile di traduzione che avevamo applicato sopra a 'Nico è un gatto ed è furbo', ottenendo

[2] In questa prova i passi 4 e 5 servono perché, in base alla definizione di = Elim, l'enunciato d'identità $a = b$ ci autorizza a sostituire a con b in Cube(a) ma non – strano a dirsi – b con a in Cube(b). A tal fine la regola richiede che ai passi precedenti figuri l'enunciato d'identità $b = a$. Di norma comunque la regola può essere rilassata, e possiamo assumere che un enunciato d'identità autorizzi la mutua sostituzione dei termini che vi ricorrono indipendentemente dal loro ordine relativo.

Almeno un x è tale che $(\mathsf{Gatto}(\mathsf{x}) \land \mathsf{Furbo}(\mathsf{x}))$.

Per finire, sostituiamo 'Almeno un x è tale che' con il quantificatore esistenziale $\exists\mathsf{x}$:

$\exists\mathsf{x}(\mathsf{Gatto}(\mathsf{x}) \land \mathsf{Furbo}(\mathsf{x}))$

Questo è il nostro corrispettivo formale di 'Almeno un ('Qualche', ecc.) gatto è furbo'. Consideriamo ora la sua negazione:

(1) $\neg\exists\mathsf{x}(\mathsf{Gatto}(\mathsf{x}) \land \mathsf{Furbo}(\mathsf{x}))$

Data l'interpretazione intesa delle lettere G e F, questa proposizione è equivalente a 'Non si dà il caso che almeno un gatto sia furbo', ossia 'Nessun gatto è furbo' o, se si vuole,

Nessun x è tale che x è un gatto e x è furbo.

Ora occupiamoci del corrispettivo formale di alcune frasi in cui ricorrono espressioni come 'tutti' ('ogni' ecc.), ad es. 'Tutti'

Tutti i gatti sono furbi.

Cominciamo osservando che questa frase è intuitivamente equivalente a

Nessun x è tale che x è un gatto e x non è furbo.

il cui corrispettivo formale si ottiene da (1) negando il secondo congiunto, così:

(2) $\neg\exists\mathsf{x}(\mathsf{Gatto}(\mathsf{x}) \land \neg\mathsf{Furbo}(\mathsf{x}))$

Sappiamo che per qualunque termine n $\mathsf{Gatto}(\mathsf{n}) \land \neg\mathsf{Furbo}(\mathsf{n})$ è tautologicamente equivalente a $\neg(\mathsf{Gatto}(\mathsf{n}) \to \mathsf{Furbo}(\mathsf{n}))$. Questo ci autorizza a sostituire in (2) $\mathsf{Gatto}(\mathsf{x}) \land \neg\mathsf{Furbo}(\mathsf{x})$ con $\neg(\mathsf{Gatto}(\mathsf{x}) \to \mathsf{Furbo}(\mathsf{x}))$, così:

$\neg\exists\mathsf{x}\neg(\mathsf{Gatto}(\mathsf{x}) \to \mathsf{Furbo}(\mathsf{x}))$

Potremmo anche fermarci qui. Sta di fatto però che se nel contesto di un enunciato $\neg\exists\mathsf{x}\neg$ è sostituito con il quantificatore universale seguito da x, ossia con $\forall\mathsf{x}$, il risultato è sempre una proposizione equivalente a quella di partenza. L'interpretazione informale di $\forall\mathsf{x}$ è appunto *tutti gli* x, *ogni* x. Dunque la nostra frase di partenza, ossia:

Tutti i gatti sono furbi.

si può rendere come

(3) $\forall\mathsf{x}(\mathsf{Gatto}(\mathsf{x}) \to \mathsf{Furbo}(\mathsf{x}))$

Non è sorprendente che nella traduzione formale di 'Tutti i gatti sono furbi' ricorra il condizionale. Dopotutto, un condizionale nel cui antecedente e conseguente ricorrono variabili, ad es.

(3) Se x è un numero primo diverso da 2 allora x è dispari.

è intuitivamente equivalente ad un'affermazione universale (nel nostro caso, all'affermazione che tutti i numeri primi diversi da 2 sono dispari). Esattamente questa equivalenza ci autorizza a trattare (3), ossia 'Ogni x è tale che se x è un gatto allora x è furbo', come equivalente a 'Tutti i gatti sono furbi'.

Per verificare che $\forall \mathsf{x}$, e dunque $\neg\exists \mathsf{x}\neg$, è un adeguato corrispettivo formale di 'tutti'/'ogni cosa', è sufficiente constatare che, in generale,

> Non si dà il caso che almeno una cosa non goda di una proprietà F.

è equivalente a

> Ogni cosa gode della proprietà F.

Ad es., 'Non si dà il caso che almeno una cosa non sia estesa' equivale a 'Nessuna cosa non è estesa' e, dunque, a 'Ogni cosa è estesa'.

Ora siamo in grado di offrire una controparte formale degli argomenti da cui siamo partiti, ossia

Nico è un gatto.	Nico è un gatto ed è furbo.
Tutti i gatti sono furbi.	(Dunque) qualche gatto è furbo.
(Dunque) Nico è furbo.	

Rappresentando al solito un argomento come una serie di premesse seguite da $\vdash$ e dalla conclusione, il risultato è rispettivamente:

$$\mathsf{Gatto(nico)}, \forall \mathsf{x}(\mathsf{Gatto(x)} \to \mathsf{Furbo(x)}) \vdash \mathsf{Furbo(nico)}$$

$$\mathsf{Gatto(nico)} \land \mathsf{Furbo(nico)} \vdash (\exists \mathsf{x})(\mathsf{Gatto(x)} \land \mathsf{Furbo(x)})$$

Di seguito alcune altre 'traduzioni' interessanti dall'italiano a un linguaggio FOL, seguite se necessario da qualche nota di commento:

Casi interessanti

(a) Tutti i gatti tranne i soriani sono furbi.

(a′) $\forall \mathsf{x}((\mathsf{Gatto(x)} \land \neg\mathsf{Soriano(x)}) \to \mathsf{Furbo(x)})$

Intuitivamente, (a) dice che tutti i gatti non soriani sono furbi, ossia che se x è un gatto e x non è soriano, allora x è furbo, come appunto dice (a′).

(b) Nessun gatto è furbo.

(b′) $\neg\exists \mathsf{x}(\mathsf{Gatto(x)} \land \mathsf{Furbo(x)})$

(b″) $\forall \mathsf{x}(\mathsf{Gatto(x)} \to \neg\mathsf{Furbo(x)})$

Queste sono due versioni equivalenti, in virtù dell'interscambiabilità di $\neg\exists \mathsf{x}\neg$ e $\forall \mathsf{x}$, e dell'equivalenza tra $\neg(\mathsf{A} \land \mathsf{B})$ e $(\mathsf{A} \to \neg\mathsf{B})$.

(c) Nessun gatto è furbo tranne i soriani

(c′) $\forall \mathsf{x}((\mathsf{Gatto(x)} \land \neg\mathsf{Soriano(x)}) \to \neg\mathsf{Furbo(x)})$

(d) Milly è una gatta che miagola solo se è incinta.

(d′) $\mathsf{Gatta(milly)} \land (\mathsf{Miagola(milly)} \to \mathsf{Incinta(milly)})$

Almeno una gatta miagola solo se è incinta.
$\exists x(\mathsf{Gatta}(x) \wedge (\mathsf{Miagola}(x) \rightarrow \mathsf{Incinta}(x)))$

Questa frase segue dalla precedente.

Il trattamento degli enunciati relazionali introduce solo alcune modeste complicazioni in questo quadro. Un enunciato esistenziale quale 'Qualcuno invidia Manlio' si può rendere come $\exists x\, \mathsf{Invidia}(x, \mathsf{manlio})$, e un enunciato universale quale 'Tutti invidiano qualcuno' come '$\forall x \exists y\, \mathsf{Invidia}(x, y)$'. Enunciati esistenziali o universali che coinvolgono relazioni di arietà maggiore di 2 (ad es. 'C'è un uomo tra Manlio e Nico') si trattano in modo del tutto analogo (nel nostro caso $\exists x(\mathsf{Uomo}(x) \wedge \mathsf{Tra}(x, \mathsf{manlio}, \mathsf{nico}))$.

Una relazione particolarmente importante è l'**identità**, che naturalmente si predica mediante il segno d'identità =. Intuitivamente, '$\mathsf{manlio} = \mathsf{nico}$' dice che manlio e nico sono una cosa sola. Il segno d'identità ci permette di avere un corrispettivo formale di frasi in cui 'è' è seguito da un nome anziché da un predicato. Ad es., 'Marilyn è Norma' può essere reso come $\mathsf{marilyn} = \mathsf{norma}$ e 'Marylin non è Olivia' come $\mathsf{marilyn} \neq \mathsf{olivia}$. Analogamente, l'enunciato che almeno una cosa è Nettuno (ossia che Nettuno esiste) si può rendere come $\exists x\, \mathsf{nettuno} = x$.[3] Ancora, la frase Identità

Nico odia tutti gli altri uomini.

si può rendere come:

$\forall x((\mathsf{uomo}(x) \wedge x \neq \mathsf{nico}) \rightarrow \mathsf{Odia}(\mathsf{nico}, x))$

Infine, utilizzando il segno d'identità possiamo ottenere le controparti formali di asserzioni sul numero degli individui di un certo tipo. Ad esempio, 'Ci sono almeno due moicani' si può rendere come 'Almeno un x e un y sono moicani e sono distinti l'uno dall'altro', ossia

(4) $\exists x \exists y(\mathsf{Moicano}(x) \wedge \mathsf{Moicano}(y) \wedge x \neq y)$

e 'Ci sono almeno tre moicani' come 'Almeno un x, un y e uno z sono moicani e sono tutti distinti l'uno dall'altro', ossia

(5) $\exists x \exists y \exists z(\mathsf{Moicano}(x) \wedge \mathsf{Moicano}(y) \wedge \mathsf{Moicano}(z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$

Analogamente, 'C'è al più un moicano' si può rendere come 'Non ci sono (almeno) due moicani' — ossia la negazione di (4) o, in modo equivalente:

(6) $\forall x \forall y((\mathsf{Moicano}(x) \wedge \mathsf{Moicano}(y)) \rightarrow x = y)$

Infine, 'C'è *esattamente* un moicano' si può rendere come la congiunzione di 'C'è almeno un moicano' e 'C'è al più un moicano', ossia:

(7) $\exists x\, \mathsf{Moicano}(x) \wedge \forall x \forall y((\mathsf{Moicano}(x) \wedge \mathsf{Moicano}(y)) \rightarrow x = y)$

che è equivalente al più breve $\exists x(\mathsf{Moicano}(x) \wedge \forall y(\mathsf{Moicano}(y) \rightarrow x = y))$.

Esercizio 3: Tradurre le seguenti in un linguaggio FOL.

3.1 Ogni francese è o francese o greco.

[3]In realtà è controverso se $\exists x\, \mathsf{nettuno} = x$ traduca adeguatamente 'Nettuno esiste'. Le ragioni della controversia non sono tuttavia di immediato interesse per noi e saranno ignorate.

3.2 Nessun francese è sia greco sia irlandese.

3.3 Qualche indiano non è greco.

3.4 Nessun francese è invidioso, tranne i guasconi.

3.5 Se Menelao è felice, allora tutti i greci lo invidiano.

3.6 Menard è francese e invidia qualche greco.

3.7 Ci sono almeno due moicani di cui uno zoppo (ossia ci sono almeno due moicani e almeno un moicano zoppo).

3.8 Almeno due moicani si insultano a vicenda (ossia ci sono almeno due moicani x e y tali che x insulta y e y insulta x)

3.9 Esattamente un greco è invidioso.

Indice analitico