Foglio 10

Consegna giovedì 19 Dicembre

Esercizio 1 (Punti 8).

1. Determinare il polinomio caratteristico della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
2. Determinare gli autovalori di A.
3. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.
4. Determinare due matrici D e Q tali che sia D diagonale e $D = QAQ^{-1}$.

Esercizio 2 (Punti 8).

1. Discutere la diagonalizzabilità della matrice
$$B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Per $\alpha = 0$ determinare una base di autovettori di $\mathbb{R}^4$.
3. Si consideri l'omomorfismo f_{B_0} associato alla matrice B_0. Scrivere la matrice associata a f_{B_0} rispetto alla base di autovettori sia su dominio che codominio.

Esercizio 3 (Punti 6). Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

1. Si verifichi che 2 e -3 sono autovalori di A.
2. Si verifichi che $(-1\ \ 0\ \ 0)^T$, $(0\ \ 1\ \ 1)^T$ e $(0\ \ -3\ \ 1)^T$ sono autovettori di A.
3. Si calcoli A^7.

Esercizio 4 (Punti 8).

1. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dimostrare che se λ è un autovalore di A, allora λ^2 è un autovalore di A. È vero che $v \in \mathbb{C}^n$ è un autovettore di A relativo all'autovalore λ se e solo se $v \in \mathbb{C}^n$ è un autovettore di A^2 relativo all'autovalore λ^2?
2. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Si dimostri che se 1 è autovalore di A, allora $A^2 + A \neq 0$.
3. Si dimostri che non esiste alcuna matrice invertibile $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tale che $A^T = -A$.