Foglio 3

Da consegnare Giovedi 24 ottobre all'inizio della lezione.

Esercizio 1 (Punti 8)**.** Determinare le inverse destre della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e le inverse sinistre della matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2 (Punti 8)**.** Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la forma ridotta, le colonne dominanti, le colonne libere e il rango della matrice

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \alpha \\ \alpha+1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2 & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

Interpretando M_α come matrice completa di un sistema lineare, si trovino le soluzioni. del sistema per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$

Esercizio 3 (Punti 8)**.**

1. Dire se l'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, in cui

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$, come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

2. Estrarre da essi una base di $\mathbb{R}^3$.
3. Considerare la matrice B che ha per colonne i vettori della base di cui al punto precedente. B è invertibile? (Giustificare la risposta). In caso affermativo determinare l'inversa.

Esercizio 4 (Punti 6)**.** Si consideri l'insieme $V := \mathbb{R}_{\geq} \setminus \{0\}$ dotato dell'operazione

$$\begin{aligned} \star : \quad V \times V &\longrightarrow \quad V \\ (v, w) &\longmapsto \quad v \cdot w \end{aligned}$$

in cui $\cdot$ denota l'usuale prodotto di $\mathbb{R}$; e dell'operazione

$$\begin{aligned} \diamond : \quad \mathbb{R} \times V &\longrightarrow \quad V \\ (\alpha, v) &\longmapsto \quad v^\alpha \end{aligned}$$

Dimostrare che V dotato delle operazioni $\star$ e $\diamond$ ha la struttura di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Ha dimensione finita?