TRACCIA DELLE SOLUZIONI DEI PROBLEMI DELL'ESAME DEL 2/9/2011

Esercizio 1 *a. Dopo aver scritto l'equazione parametrica* $\boldsymbol{C}(t)$ *della curva di equazione cartesiana*

$$y \;=\; x^2 - x,$$

si calcolino i vettori $\boldsymbol{T}(t)$*,* $\boldsymbol{N}(t)$ *e* $\boldsymbol{B}(t)$*, e la curvatura della parabola in funzione del parametro* t*.*
b. Quanto vale la curvatura massima, e in quali punti della curva si trovano? Si disegnino la curva e, dopo averlo determinato, il cerchio osculatore di curvatura massima.
c. Infine, posto $s(t) \;=|t/4| - 1/2$*, si descriva e si rappresenti la superficie parametrica 3D di equazione*

$$\boldsymbol{S}(t,v) \;=\; \boldsymbol{C}(t) \;+\; s(t)2\cos v\boldsymbol{N}(t) \;+\; s(t)3\sin v\boldsymbol{B}(t), \quad -2 \le t \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$$

Soluzione.

a. $\mathbf{C}(t) = (t, t^2-t, 0)$, $\mathbf{C'}(t) = (1, 2t-1, 0)$, $\mathbf{C''}(t) = (0, 2, 0)$.
$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2-4t+2}}(1,\ 2t-1,\ 0)$, $\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2-4t+2}}(1-2t,\ 1,\ 0)$ e $\mathbf{B}(t) = \mathbf{k}$.
$k(t) = \frac{2}{(4t^2-4t+2)^{3/2}}$.
b. La curvatura è massima quando il denominatore è minimo; siccome il radicando del denominatore è un polinomio di secondo grado, è minimo quando $x = 1/2$. In tal caso $k(1/2) = 2$, come c'era da aspettarsi, essendo il minimo l'ascissa del vertice della parabola. Per il cerchio osculatore si veda la traccia delle soluzioni dei compiti precedenti.
c. Anche per questo punto si vedano le soluzioni precedenti. Variante in questo caso: la sezione perpendicolare alla curva in un punto è un'ellisse di semiassi $2s(t)$ e $3s(t)$.

Esercizio 2 *Sia data la superficie* S *individuata dall'equazione*

$$z = f(x,y) = xye^{x^2-2y^2}.$$

a. Determinare il gradiente e gli eventuali punti stazionari di f*.*
b. Precisare la natura degli eventuali punti stazionari di f*, senza calcolare la matrice Hessiana.*
c. Calcolare la matrice Hessiana e verificare il risultato ottenuto al punto precedente.
d. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $Q = (1;-1)$ *alla curva di livello passante per il punto* Q *stesso.*

Soluzione.

a. $\nabla f = e^{x^2-2y^2}(y + 2x^2y,\ x - 4xy^2) = e^{x^2-2y^2}(y(1+2x^2),\ x(1-4y^2))$; l'unico punto stazionario è l'origine.
b. L'origine è un punto di sella. Infatti f si annulla sugli assi, è positiva nel 1° e 3° quadrante, e negativa nel 2° e 4°.
c. Questo è un esercizio di derivazioni; risulta:

$$f_{11}(x,y) = 2xy(2x^2+3)e^{x^2-2y^2}$$

$$f_{12}(x,y) = (2x^2+1)(1-4y^2)e^{x^2-2y^2} = f_{21}(x,y)$$
$$f_{22}(x,y) = 4xy(4y^2-3)e^{x^2-2y^2}.$$

La matrice hessiana in $(0,\ 0)$ vale

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ed è indefinita, confermando che il punto stazionario è di sella.
d. Poiché $f(1,-1) = -1/e$, la curva di livello richiesta è $xye^{x^2-2y^2} = -1/e$.
$\nabla f(1,-1) = -3/e \cdot (1,1)$, pertanto la retta tangente

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) = 0$$

ha equazione $x+y=0$.

Esercizio 3 *È dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = (3x^2+2x-3y, 2y-3x).$$

a. Provare che $\boldsymbol{F}$ è conservativo su $\boldsymbol{R}^2$ e trovarne il potenziale che si annulla in $A(-1,1)$.
b. Si imposti il calcolo dell'integrale

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\gamma$$

dove γ è la circonferenza di centro A e raggio 3, senza eseguire i calcoli.
c. Usando il risultato del punto a, si valuti l'integrale precedente, giustificando il risultato.

Soluzione.

a. $\mathbf{F}$ è conservativo se

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

e il dominio su cui è definito è *semplicemente connesso.*
La prima condizione è immediata da verificare, e il dominio $\mathbf{R}^2$ è semplicemente connesso.
Si noti che la prima condizione è necessaria, ma da sola non è sufficiente.
Calcolo del potenziale. Partiamo dal fatto che

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = 3x^2+2x-3y;$$

integrando rispetto ad x si ha

$$\Phi(x,y) = x^3+x^2-3xy+C(y).$$

Ora, poiché

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = 2y-3x,$$

derivando la Φ prima calcolata otteniamo

$$-3x + C'(y) = 2y - 3x,$$

da cui deduciamo $C(y) = y^2 + k$.
Quindi

$$\Phi(x, y) = x^3 + x^2 - 3xy + y^2 + k,$$

ed imponendo la condizione che il potenziale si annulli in A, otteniamo $k = -4$.
b. La circonferenza di centro A e raggio 3 ha equazioni parametriche

$$\gamma(t) = (-1 + 3\cos t,\ 1 + 3\sin t).$$

Quindi $d\gamma = (-3\sin t, 3\cos t)$, e il campo dato diventa
$\mathbf{F}(\mathrm{t})= (3(3\cos t - 1)^2 + 2(3\cos t - 1) - 3(3\sin t + 1),\ 2(3\sin t + 1) - 3(3\cos t - 1))$.
Sviluppando i calcoli nell'integrale infine si ha

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} [-81\cos^2 t \sin t + 54\cos t \sin t + 27(\sin^2 t - \cos^2 t) + 15\cos t + 6\sin t] dt.$$

c. Essendo il campo conservativo, la circuitazione lungo una linea chiusa è nulla.

Esercizio 4 *a. Si consideri il solido*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16,\ x^2 + y^2 \leq 6z\},$$

e lo si rappresenti nel sistema $Oxyz$.
b. Descriverne la frontiera e calcolarne il volume (risultato di controllo: 76/3 π).
c. Servendosi del teorema della divergenza calcolare il flusso totale del campo

$$\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$$

uscente da V ed il flusso uscente da ogni superficie che delimita V.

Soluzione.

a. Il solido V è intersezione tra la sfera di centro l'origine e raggio 4, individuata dalla condizione $x^2+y^2+z^2 \leq 16$, e la parte di spazio che sta 'sopra' il paraboloide determinato da $x^2 + y^2 \leq 6z$. Le superfici della sfera e del paraboloide si intersecano sul piano α di equazione $z = 2$ (fig.1).
b. V è delimitato inferiormente dalla parte di superficie del paraboloide S_P che sta 'sotto' il piano α, e superiormente dalla parte di superficie della sfera (detta *calotta*) S_S che sta 'sopra' lo stesso piano.
Per il calcolo del volume conviene passare a coordinate cilindriche, data la simmetria rotazionale di V. Si ottiene

$$V = \{(\rho, \theta, z) : \rho^2 + z^2 \leq 16,\ \rho^2 \leq 6z\},$$

e ancora, separando la calotta sferica dalla parte del paraboloide:

$$V = V_P \cup V_S = \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq z \leq 2,\ \rho^2 \leq 6z\} \cup \{(\rho, \theta, z) : 2 \leq z \leq 4,\ \rho^2 + z^2 \leq 16\}.$$

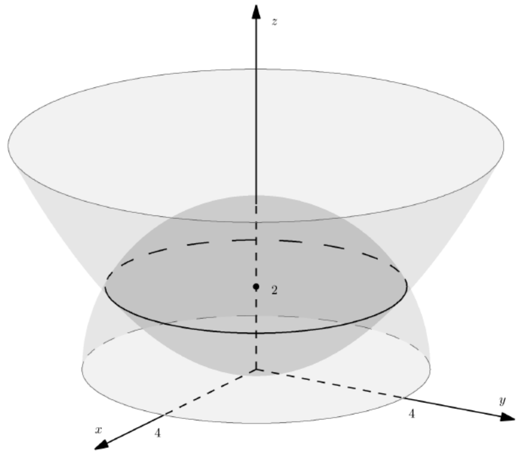

Figura 1: Solido dell'es. 4

Il calcolo. Si osservi che le sezioni di V per piani perpendicolari all'asse z (e quindi per z costante) sono tutti cerchi di area $\pi r^2 = \pi 6z$ per $0 \leq z \leq 2$, e di area $\pi r^2 = \pi(16 - z^2)$ per $2 \leq z \leq 4$. L'elemento di volume è quindi $dV = \pi r^2 dz$; integrando otteniamo

$$V_P = \int_0^2 \pi 6z dz = 12\pi,$$

e

$$V_S = \int_2^4 \pi(16 - z^2)dz = \frac{40}{3}\pi.$$

Alternativamente e con qualche calcolo in più, possiamo usare la formula 'ufficiale' $dV = \rho d\rho d\theta dz$; in tal caso abbiamo

$$V_P = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{6z}} \rho d\rho d\theta dz = ... = 12\pi,$$

e

$$V_S = \int_2^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{16-z^2}} \rho d\rho d\theta dz = ... = \frac{40}{3}\pi.$$

c. Poiché $\nabla \cdot F = 1 + 1 + 2 = 4$, il flusso totale è

$$\Phi(V) = 4V = \frac{304}{3}\pi.$$

Per il calcolo del flusso attraverso le due superfici che delimitano V, si osservi che

$$\Phi(V_P) = \Phi(S_P) + \Phi(S_C),$$

dove S_C indica la superficie del cerchio intersezione sul piano α.
Il flusso $\Phi(S_C)$ si calcola direttamente: si ha $\mathbf{N}_{S_C} = \mathbf{k}$ e, su S_C, $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ essendo $z = 2$.
Ciò porta a $\Phi(S_C) = \int_{S_C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_C ds = 4 \int_{S_C} ds = 4(12\pi) = 48\pi$. Poiché $\Phi(V_P) = 4V_P = 48\pi$, risulta $\Phi(S_P) = 0$. In modo analogo, poiché

$$\Phi(V) - \Phi(S_P) = \Phi(S_S),$$

si ottiene

$$\Phi(S_S) = \Phi(V) = \frac{304}{3}\pi.$$

Esercizio 5 *Risolvere le seguenti equazioni differenziali:*

a. $\frac{dy}{dx} = x(x^2 - y)$

b. $y'' - 7y' + 6y = -10e^x$ *con i valori iniziali* $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = 3$.

Soluzione.

a. Si veda l'Adams, pagg. 417-418.
b. Si tratta di un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine. Soluzione generale: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{6x} + 2xe^x$. A questa (e NON alla soluzione dell'omogenea associata!) si impongono le condizioni iniziali, che portano a $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, da cui $y(x) = e^x(2x + 1)$.