Matematica e Statistica

Prova d'esame (20/02/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Matematica e Statistica

Prova di MATEMATICA (20/02/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Cognome-Nome _____ Matr. _____

IN STAMPATELLO VR · · · · · ·

*** *Svolgere prima i punti* (a) *di <u>tutti</u> gli esercizi; solo in seguito i punti* (b). *** ▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶

(1) (a) Nello spazio tridimensionale il piano Π contiene l'asse x ed è parallelo al vettore $\vec{v} = (1, 3, -2)$; mentre la retta r, passante per il punto $P(-2, 1, 1)$, è ortogonale a $\vec{v} = (1, 3, -2)$ e all'asse y. Determinare per entrambi una forma parametrica e una cartesiana.

(b) Determinare il punto Q d'intersezione tra Π e r, e (sempre sia forma parametrica che cartesiana) la retta s passante per Q, contenuta in Π ortogonale a r.

(2) Studiare (giustificando le conclusioni) l'andamento di $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{|x| - 1}$, e tracciarne il grafico.[1]

(3) (a) Calcolare gli integrali $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 - 2x + 2}\, dx$ e $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x} + 1}\, dx$.

(b) Disegnare $S = \left\{(x, y) : x \geq 0,\ y \leq 5,\ \dfrac{1}{2}x\sqrt{x+1} \leq y \leq 6 - x\right\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Data $g(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2 + 2y - 1}{x^2 - 1}$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali. Se possibile, descrivere le curve di livello $g(x, y) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(b) Calcolare gli estremi assoluti di g sull'insieme $\mathcal{Q} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ 8x^2 \leq y \leq 2\}$.

(5) Sono date le equazioni differenziali $y' = e^{-x} + 2\,e^x - y$ e $y'' + 2y' + y = 4e^x$.

(a) Trovare le soluzioni di ciascuna delle due equazioni, specificando se ve ne sono in comune.

(b) Quali delle soluzioni tendono a $+\infty$ sia quando x tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$?

[1] Per lo studio di crescenza e convessità potrebbe essere utile un confronto grafico.

Matematica e Statistica

Prova di STATISTICA (20/02/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Cognome-Nome _____ Matr. _____

IN STAMPATELLO VR · · · · · ·

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! **** ▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶

Esercizio 1)
Un ricercatore vuole verificare la pericolosità dell'uso dei telefonini cellulari di nuova generazione. Per far ciò ha provato a fare una telefonata di 3 minuti ad un un soggetto ed ha valutato la penetrazione delle onde nel cervello mediante un esame non invasivo. Il risultato della penetrazione delle onde è stato suddiviso in tre categorie (Alto, Medio e Basso). L'esperimento condotto su 40 soggetti ha conseguito i seguenti risultati:

A A M B A M M A B A M B A M A A M B M B
A B A M M B A M M M A M A M A M A B M A

Il candidato

a) Determini la tipologia del carattere.
b) Fornisca una rappresentazione grafica dei dati.
c) Indichi e calcoli tutti gli indici di posizioni adeguati ai dati.
d) Descriva e calcoli gli indici di variabilità adeguati ai dati.
e) Dopo aver descritto quali caratteristiche siano riassunte dagli gli indici sintetici di forma, calcoli quelli adatti ai dati in esame.

Esercizio 2)
Ai 40 soggetti descritti nel precedente esercizio è stato chiesto il numero intero di ore in cui usano il cellulare in media al giorno. Si sono ottenute *ordinatamente*[1] le seguenti osservazioni:

0 2 1 1 2 2 2 0 1 2 2 1 1 1 0 1 0 2 1 1
0 2 1 0 1 0 0 1 2 1 2 2 0 0 1 0 1 0 2 1

Il candidato usi queste osservazioni per stimare puntualmente e per intervallo il numero di ore in cui un generico soggetto usa il cellulare. Il candidato indichi le ipotesi necessarie e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.

Esercizio 3)
Il ricercatore vuole utilizzare i dati raccolti negli esercizi 1 e 2 per verificare se i due caratteri misurati siano tra di loro legati. Il candidato

a) raccolga i dati in una tabella a doppia entrata
b) indichi il carattere della serie bi-variata ottenuta
c) Se possibile calcoli un indice sintetico di posizione
d) Il candidato verifichi se esiste un legame fra le ore di uso quotidiano del cellulare ed il grado di penetrazione delle onde, evidenziando le necessarie ipotesi. Il candidato proceda al calcolo anche se queste non fossero verificate.
e) Qualora un legame esistesse, si indichi la natura del legame.

Esercizio 4)
Si considerino i seguenti eventi dichiarati indipendenti.

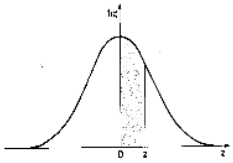
E_1: si ottenga $x<1$ dove x è estratto da una v. c. distribuita come una $N(2,1)$.
E_2: si ottenga $y>0$ dove y è estratto da una v. c. $Unif(-2;1)$.

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.
b) Il candidato fornisca la definizione dei seguenti eventi notevoli: eventi statisticamente indipendenti, evento certo ed evento impossibile.

1 Il termine ordinatamente indica che le osservazioni sono state raccolte interrogando le stesse unità statistiche nel medesimo ordine e che quindi le osservazioni relative alla stessa unità statistica occupano la stessa posizione. Pertanto se si volesse costruire le osservazioni relative alla bi-variata si esse sarebbero (A;0), (A;2), (M,1), ..., (A;1).

Tavola I

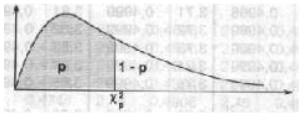
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.



ν \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

Soluzioni

MATEMATICA

(1) (a) Il piano Π, contenendo l'asse x, deve passare per l'origine $O(0,0,0)$ ed essere parallelo al vettore $\vec{e}_1 = (1,0,0)$; considerato anche poi il parallelismo al vettore $\vec{v} = (1,3,-2)$, una forma parametrica è $\Pi = \{(x,y,z) = (0,0,0) + s(1,0,0) + t(1,3,-2) : s,t \in \mathbb{R}\} = \{(s+t, 3t, -2t) : s,t \in \mathbb{R}\}$; sostituendo poi $t = -\frac{1}{2}z$ e $s = x - t = x + \frac{1}{2}z$ in $y = 3t$ si ottiene $y = -\frac{3}{2}z$, ovvero $2y + 3z = 0$ (per arrivarci subito bastava osservare che $t = \frac{1}{3}y = -\frac{1}{2}z$). • La retta r, ortogonale sia a $\vec{v}$ che all'asse y (dunque ortogonale al vettore $\vec{e}_2 = (0,1,0)$), sarà parallela al prodotto vettoriale $\vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{e}_2 = (2,0,1)$; tenuto presente il passaggio per il punto $P(-2,1,1)$, una forma parametrica risulta $r = \{(-2,1,1) + u(2,0,1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(-2+2u, 1, 1+u) : u \in \mathbb{R}\}$. Sostituendo poi $u = z-1$ in $(x,y) = (-2+2u, 1)$ si ottiene una forma cartesiana dal sistema delle due equazioni $x - 2z + 4 = 0$ e $y = 1$.

(b) Il punto Q d'intersezione tra il piano Π e la retta r si può trovare mettendo in sistema le equazioni delle rispettive forme cartesiane, o confrontando tra loro le forme parametriche: nel primo modo, da $y = 1$ e $z = -\frac{2}{3}y = -\frac{2}{3}$ si ricava $x = 2z - 4 = -\frac{4}{3} - 4 = -\frac{16}{3}$, da cui $Q(-\frac{16}{3}, 1, -\frac{2}{3})$; nel secondo, da $(s+t, 3t, -2t) = (-2+2u, 1, 1+u)$ si ricava $t = \frac{1}{3}$, $u = -2t - 1 = -\frac{5}{3}$ e $s = -2 + 2u - t = -\frac{17}{3}$, da cui nuovamente $Q(-\frac{16}{3}, 1, -\frac{2}{3})$. • La retta s è ortogonale a r, dunque deve essere ortogonale al vettore $\vec{w} = (2,0,1)$; inoltre, essendo contenuta nel piano Π, deve essere ortogonale anche al vettore $\vec{u} = (0,2,3)$ (che è ortogonale al piano Π, come si deduce dall'equazione cartesiana $2y + 3z = 0$); dunque s sarà parallela al prodotto vettoriale $\vec{w} \wedge \vec{u}_2 = (-2,6,4)$ (o anche a $(1,-3,-2)$, parallelo). Tenuto conto del passaggio per Q, una forma parametrica sarà allora $s = \{(-\frac{16}{3}, 1, -\frac{2}{3}) + k((1,-3,-2)) : k \in \mathbb{R}\} = \{(-\frac{16}{3} + k, 1 - 3k, -\frac{2}{3} - 2k) : k \in \mathbb{R}\}$; sostituendo poi $k = x + \frac{16}{3}$ in $(y,z) = (1 - 3k, -\frac{2}{3} - 2k)$ si ottiene una forma cartesiana dal sistema delle due equazioni $(y,z) = (-3x - 15, -2x - \frac{34}{3})$, ovvero $3x + y + 15 = 0$ e $6x + 3z + 34 = 0$.

(2) (Figura 1) La funzione $f(x) = \frac{e^x - 2}{|x| - 1}$ è definita per $x \neq \mp 1$, e nel dominio è derivabile infinite volte tranne che in $x = 0$ dove, a causa del modulo, è solo continua ed è probabile un punto angoloso. Vale $f(x) = 0$ quando $e^x = 2$, ovvero $x = \log 2$. Il numeratore è positivo per $x > \log 2$, il denominatore per $x < -1$ oppure $x > 1$, dunque vale $f(x) > 0$ per $-1 < x < \log 2$ oppure per $x > 1$. I limiti interessanti sono in $\mp\infty$ e in ∓ 1: quelli determinati sono $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$, $\lim_{x \to -1^{\mp}} f(x) = \lim_{x \to 1^{\mp}} f(x) = \mp\infty$, mentre $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ è in forma determinata ma si vede subito (con de l'Hôpital, o raccogliendo e^x sopra e x sotto) che vale $+\infty$: dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$, $x = \mp 1$ sono asintoti verticali bilateri, ed essendo $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ non c'è asintoto obliquo a $+\infty$ (in effetti la crescenza è a tutti gli effetti di tipo esponenziale). Derivando si ottiene $f'(x) = \frac{e^x(|x|-1-\sigma)+2\sigma}{(|x|-1)^2}$ ove $\sigma = \operatorname{sign} x$ (dunque $\sigma = \mp 1$ a seconda che $x \lessgtr 0$). Per $x > 0$ si ottiene $f'(x) = \frac{e^x(x-2)+2}{(x-1)^2}$, dunque vale $f'(x) \geq 0$ quando $e^x(x-2) + 2 \geq 0$, ovvero $x - 2 \geq -2e^{-x}$: un accurato confronto grafico tra la funzione lineare $x - 2$ e l'esponenziale $-2e^{-x}$ mostra che esiste $x_1 \in]1,2[$ tale che ciò è verificato per $x \geq x_1$, e ciò prova che $f(x)$ decresce su $]0,1[$ e su $]1,x_1[$ e cresce in $]x_1, +\infty[$, dunque $x = x_1$ è punto di minimo locale (con $f(x_1) \sim 4{,}9$). Invece quando $x < 0$ si ha $f'(x) = -\frac{x\,e^x + 2}{(x+1)^2}$, dunque vale $f'(x) \geq 0$ quando $x\,e^x + 2 \leq 0$, ovvero $x \leq -2\,e^{-x}$, ma per $x < 0$ ciò non si verifica mai: dunque $f(x)$ decresce in $]-\infty, -1[$ e in $]-1, 0[$. Notiamo anche che $f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -2$ e $f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$, dunque come previsto $x = 0$ è effettivamente un punto angoloso. Derivando ulteriormente si ha $f''(x) = \frac{e^x(x^2 - 2(1+\sigma)x + 3 + 2\sigma) - 4}{(|x|-1)^3}$. Per $x > 0$ si ottiene $f''(x) = \frac{e^x(x^2 - 4x + 5) - 4}{(x-1)^3}$: il numeratore è ≥ 0 quando $x^2 - 4x + 5 \geq 4e^{-x}$, e un altro accurato confronto grafico tra la funzione quadratica $x^2 - 4x + 5$ (il grafico è una parabola) e l'esponenziale $4e^{-x}$ mostra che per $x > 0$ ciò è sempre vero; d'altra parte il denominatore è ≥ 0 per $x > 1$, dunque vale f è concava per $0 < x < 1$ e convessa per $x > 1$. Invece per $x < 0$ si ha $f''(x) = -\frac{e^x(x^2+1) - 4}{(x+1)^3}$; il numeratore è ≥ 0 quando $x^2 + 1 \geq 4\,e^{-x}$, e sempre un confronto grafico mostra che per $x < 0$ ciò è sempre falso; d'altra parte il denominatore è ≥ 0 per $x > -1$, dunque f è concava per $x < -1$ e convessa per $-1 < x < 0$.

(3) (a) Vale $\frac{x^3}{x^2 - 2x + 2} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 2) + 2x - 4}{x^2 - 2x + 2}$, dunque $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 - 2x + 2}\,dx = \int_0^1 (x + 2 + \frac{(2x-2) - 2}{x^2 - 2x + 2})\,dx = \int_0^1 (x + 2 + \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} - \frac{2}{(x-1)^2 + 1})\,dx = (\frac{1}{2}x^2 + 2x + \log(x^2 - 2x + 2) - 2\operatorname{arctg}(x-1)]_0^1 = (\frac{1}{2} + 2) - (\log 2 - 2(-\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi + 5}{2} - \log 2$. • Posto $x = t^2$, da cui $dx = 2t\,dt$, si ricava $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx = 2\int_0^2 \frac{t}{t+1}\,dt = 2\int_0^2 (1 - \frac{1}{t+1})\,dt = 2(t - \log(t+1)]_0^2 = 2(2 - \log 3)$.

(b) (Figura 2) La funzione $\varphi(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x+1}$ è di facile studio (definita per $x \geq 1$, nulla per $x = -1$ e $x = 0$, negativa su $[-1, 0]$ e positiva poi, ed essendo $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1} + \frac{x}{4\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{4\sqrt{x+1}}$ essa decresce fino al minimo

$\varphi(-\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \sim -0{,}2$ e poi cresce a $+\infty$ come la potenza $x^{3/2}$). L'equazione $\frac{1}{2}x\sqrt{x+1} = 6-x$ equivale, elevando al quadrato (pensando dunque $x \le 6$) a $x^3-3x^2+48x-144 = (x-3)(x^2+48) = 0$, con la sola soluzione reale $x = 3$, e vale $5 = 6-x$ quando $x = 1$: dunque l'area di S, posto $x+1 = t^2$, vale $\int_0^1 5\,dx + \int_1^3 (6-x)\,dx + \int_3^0 \frac{1}{2}x\sqrt{x+1}\,dx = (5x]_0^1 + (6x - \frac{1}{2}x^2]_1^3\,dx - \int_1^2 (t^2-1)t^2\,dt = (5) - (0) + (\frac{27}{2}) - (\frac{11}{2}) - (\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3]_1^2 = 13 - ((\frac{56}{15}) - (-\frac{2}{15})) = \frac{137}{15} \sim 9{,}1$.

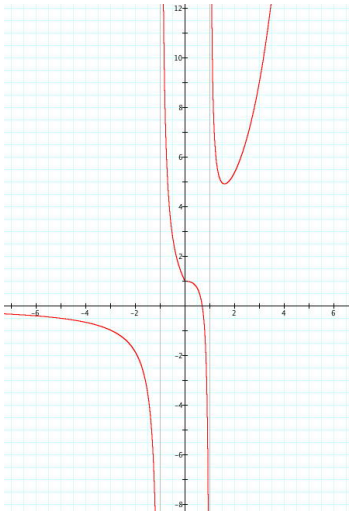
(4) (a) (Figura 3) Il dominio di $g(x,y) = \frac{x^2+y^2+2y-1}{x^2-1}$ è tutto il piano $\mathbb{R}^2$ privato delle rette verticali $x = \mp 1$; si tratta di una funzione differenziabile nel suo dominio, in quanto le derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{2xy(y+2)}{(x^2-1)^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2(y+1)}{x^2-1}$ risultano continue. La funzione è evidentemente pari rispetto a x (infatti $f(-x,y) = f(x,y)$); essa si annulla quando $x^2+y^2+2y-1 = 0$, ovvero $x^2+(y+1)^2 = 2$: si tratta dunque della circonferenza di centro $C(0,-1)$ e raggio $\sqrt{2}$, da cui però vanno esclusi i punti $P_1^{\mp}(\mp 1, 0)$ e $P_2^{\mp}(\mp 1, -2)$ perché fuori dal dominio. Il numeratore è positivo al di fuori della circonferenza, il denominatore lo è all'esterno delle due rette verticali $x = \mp 1$, e il segno di g ne segue per quoziente. I limiti interessanti sono a ∞_2 e nei punti delle rette $x = \mp 1$. In un punto $(\mp 1, y_0)$ delle rette verticali diverso da $P_1^{\mp}$ e $P_2^{\mp}$ (dunque con $y_0 \neq 0, 2$) il denominatore tende a zero e il numeratore no, dunque il limite è $\pm\infty$ a seconda di y_0 e del lato destro o sinistro da cui vi si tende. In ∞_2 il limite non esiste: ad esempio, tendendovi lungo l'asse y la funzione vale $g(0,y) = -(y^2+2y-1)$ e dunque tende a $-\infty$, mentre tendendovi lungo l'asse x la funzione vale sempre $g(x,0) \equiv 1$ (notiamo che la stessa cosa accade per la retta orizzontale $y = -2$, in cui $g(x,-2) \equiv 1$). Quanto ai punti $P_1^{\mp}$ e $P_2^{\mp}$, tendendovi lungo la circonferenza la funzione è nulla, mentre tendendo ad essi lungo l'asse x (per $P_1^{\mp}$) o lungo la retta $y = -2$ (per $P_2^{\mp}$) la funzione vale come detto sempre 1: dunque il limite non esiste nemmeno in questi quattro punti. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$: da $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si ricava $y = -1$, che messo in $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ dà $x = 0$, da cui il già noto punto $C(0,-1)$. A conti fatti la matrice hessiana di g risulta $\mathsf{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y(y+2)(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} & -\frac{4x(y+1)}{(x^2-1)^2} \\ -\frac{4x(y+1)}{(x^2-1)^2} & \frac{2}{x^2-1} \end{pmatrix}$; essendo $\mathsf{H}_g(C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, il criterio dell'hessiano ci dice subito che C è un punto di sella. Esaminiamo infine le curve di livello $g(x,y) = k$, ovvero $(1-k)x^2 + (y+1)^2 = 2-k$, iniziando da due casi particolari: se $k = 1$ si ha $y^2+2y = 0$, ovvero $y(y+2) = 0$, ovvero $y = 0$ oppure $y = -2$, che è l'unione dell'asse x e della retta $y = -2$ (già avevamo osservato in precedenza che su tali rette la funzione vale 1); se invece $k = 2$ otteniamo $-x^2+(y+1)^2 = 0$, ovvero $x = \mp(y+1)$, unione delle due rette $x = y+1$ e $x = -y-1$ (che si intersecano in $C(0,-1)$). In tutti gli altri casi possiamo scrivere $\frac{x^2}{\frac{2-k}{1-k}} + \frac{(y+1)^2}{2-k} = 1$ che, come noto, a seconda dei valori di k possono essere delle ellissi centrate in C (quando $\frac{2-k}{1-k} > 0$ e $2-k > 0$, ovvero per $k < 1$; in particolare per $k = 0$ otteniamo come già noto la circonferenza degli zeri $x^2+y^2+2y-1 = 0$) o delle iperboli centrate in C con i vertici sull'asse x (quando $\frac{2-k}{1-k} > 0$ e $2-k < 0$, ovvero per $k > 2$) o sull'asse y (quando $\frac{2-k}{1-k} < 0$ e $2-k > 0$, ovvero per $1 < k < 2$).

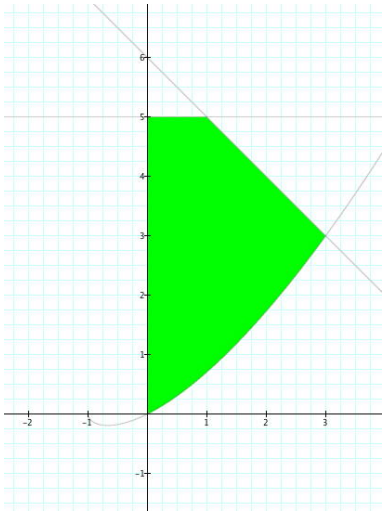
(b) (Figura 3) Per la ricerca degli estremi assoluti di g sull'insieme $\mathcal{Q} = \{(x,y) : 0 \le x \le \frac{1}{2},\ 8x^2 \le y \le 2\}$ (che esistono in base a Weierstrass, essendo $\mathcal{Q}$ un sottoinsieme compatto —ovvero chiuso e limitato— interamente contenuto nel dominio di g, che è continua) dividiamo $\mathcal{Q}$ nelle zone $\mathcal{Q}_0$ dei suoi punti interni; $\mathcal{Q}_1$ del bordo orizzontale privato dei vertici; $\mathcal{Q}_2$ del bordo verticale privato dei vertici; $\mathcal{Q}_3$ del bordo parabolico privato dei vertici; e $\mathcal{Q}_4 = \{O(0,0),\ A(0,2),\ B(\frac{1}{2},2)\}$ dei vertici. • Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{Q}_0$, tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per g: ma come visto prima l'unico è $C(0,-1)$, che però non sta in $\mathcal{Q}_0$ (poco male: essendo una sella non sarebbe interessante nella nostra ricerca). • Sul lato $\mathcal{Q}_1$ la funzione vale $\varphi_1(x) := g(x,2) = \frac{x^2+7}{x^2-1}$, con $0 < x < \frac{1}{2}$. Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{Q}_1$, in tale punto dovrebbe annullarsi la derivata $\varphi_1'(x) = -\frac{16x}{(x^2-1)^2}$, e ciò accade in $x = 0$, che però è un estremo (è il punto A) e non sta in $\mathcal{Q}_1$. • Similmente, sul lato $\mathcal{Q}_2$ la funzione vale $\varphi_2(y) := g(0,y) = -(y^2+2y-1)$ con $0 < y < 2$; ma la derivata $\varphi_2'(y) = -(2y+2)$ si annulla in $y = -1$, che però non sta in $\mathcal{Q}_2$. • Sul lato $\mathcal{Q}_3$, che giace sulla parabola $y = 8x^2$ con $x > 0$ e $0 < y < 2$, si può sostituire x^2 con $\frac{1}{8}y$ dunque la funzione vale $\varphi_3(y) := \frac{8y^2+17y-8}{y-8}$ con $0 < y < 2$; la derivata $\varphi_3'(y) = 2\frac{4y^2-54y-59}{(y-8)^2}$ si annulla per $y = \frac{27 \mp \sqrt{965}}{4}$, che però sono valori entrambi al di fuori di $]0,2[$ e dunque non interessano. • Infine, i tre punti O, A, B di $\mathcal{Q}_4$ vanno tenuti tutti presenti. • Gli estremi assoluti di g su $\mathcal{Q}$ potranno dunque assunti solo nell'ambito dei tre estremi O, A, B: poiché $g(O) = 1$, $g(A) = -7$ e $g(B) = -\frac{29}{3} \sim -9{,}7$, il massimo assoluto di g su $\mathcal{Q}$ è 1 (assunto in O) e il minimo assoluto è $-\frac{29}{3}$ (assunto in B).

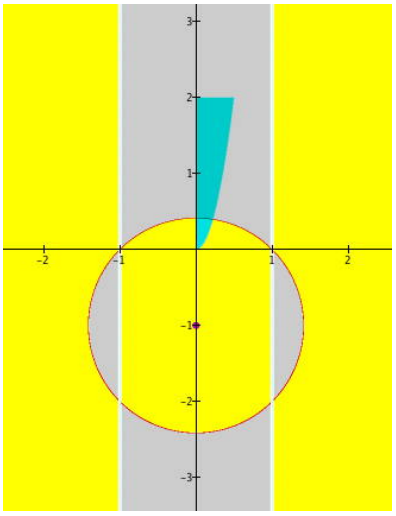
(5) (a) L'equazione differenziale $y' = e^{-x} + 2\,e^x - y$ è linare del primo ordine, perché può essere scritta nella forma $y' + p(x)\,y = q(x)$ con $p(x) = 1$ e $q(x) = e^{-x} + 2\,e^x$. Una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = x$, e $\int e^{P(x)}q(x)\,dx = \int e^x(e^{-x} + 2\,e^x)\,dx = \int (1 + 2\,e^{2x})\,dx = x + e^{2x}$: dunque le soluzioni sono tutte e sole quelle del tipo $y(x) = e^{-P(x)}(\int e^{P(x)}q(x)\,dx + k) = e^{-x}(x+e^{2x}+k) = (x+k)\,e^{-x} + e^x$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. • L'equazione $y''+2y'+y = 4e^x$ è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2+2t+1 = 0$ ha soluzione doppia $t = -1$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = A\,e^{-x} + B\,x\,e^{-x} = (A+Bx)\,e^{-x}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per la completa con $b(x) = 4e^x$ è del tipo $\tilde{y}(x) = a\,e^x$, e dovendo essere $\tilde{y}''(x) + 2\tilde{y}'(x) + \tilde{y}(x) = a\,e^x + 2a\,e^x + a\,e^x = 4a\,e^x = 4\,e^x$ si ha $a = 1$; dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione completa è $y(x) = (A+Bx)\,e^{-x} + e^x$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. • Notiamo che tutte le soluzioni della

prima equazione lo sono anche della seconda.

(b) La soluzione $y(x) = (A + Bx)\, e^{-x} + e^{x}$ quando x tende a $+\infty$ tende sempre a $+\infty$ (infatti $(A + Bx)\, e^{-x}$ tende sempre a 0 qualunque siano $A, B \in \mathbb{R}$). Quando invece x tende a $-\infty$, se $B \neq 0$ essa tende a $-(\operatorname{sign} B)\infty$ mentre se $B = 0$ essa tende a $(\operatorname{sign} A)\infty$ (se $A \neq 0$) oppure a 0 (se anche $A = 0$), dunque affinché essa tenda a $+\infty$ bisognerà che $B < 0$ (con A qualsiasi) oppure che $B = 0$ e $A > 0$. Ad esempio, nessuna delle soluzioni della prima equazione (che sono quelle con $A = k$ e $B = 1$) soddisfa a questi requisiti.





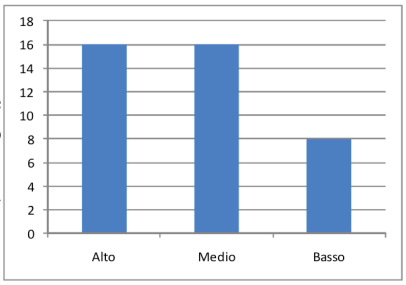


1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. (4.b): zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g; il punto stazionario (porpora); l'insieme $\mathcal{Q}$ (azzurro).

STATISTICA

a) Determini la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo qualitativo (in quanto espresso da giudizi e non numeri) ordinabile (in quanto i giudizi possono essere ordinati).



b) Fornisca una rappresentazione grafica opportuna.

Per caratteri qualitativi non ordinabili tipicamente si utilizza come rappresentazione grafica il diagramma a barre. Questo diagramma è ottenuto ponendo sulle ascisse di un piano cartesiano le modalità delle osservazioni e disegnando per ogni modalità un rettangolo la cui altezza è pari alla relativa frequenza assoluta. A lato si mostra il diagramma relativo ai dati in oggetto.

c*) Si indichino e si calcolino tutti gli indici di posizioni adeguati ai dati*.

L'indice di posizione di una serie di osservazioni indica il valore centrale che viene assunto dalla serie. Gli indici di posizione visti a lezione sono tre: moda, mediana e media. Per i caratteri in esame sono calcolabili sono i primi due.

- La moda (ovvero la modalità cui corrisponde la modalità maggiore). In questo la frequenze assoluta non ha un massimo unico ma doppio. Si dice quindi che la statistica è bimodale e le due mode sono "Alto" e "Medio".
- La Mediana (ovvero l'osservazione che bipartisce le osservazioni ordinate). In questo caso si hanno 40 osservazioni pertanto la mediana deve lasciarne (40-1)/ 19.5 alla propria destra ed altrettante alla propria sinistra. Poiché questo non è possibile, generalmente si mediano la 20-sima e la 21-sima osservazione. Normalmente la media di due osservazioni qualitative non sarebbe possibile ma considerando le frequenze assolute e cumuliate riportate a lato si evince che entrambe le osservazioni sono pari ad M, quindi la mediana non può che essere "M".

	n_i	F_i
Alto	16	16
Medio	16	32
Basso	8	40

d) Descriva e calcoli gli indici di variabilità adeguati ai dati..

Per dati come qualitativi non è possibile determinare alcun indice di variabilità.

e) Dopo aver descritto quali caratteristiche siano riassunte dagli gli indici sintetici di forma forma, calcoli quelli adatti ai dati in esame.

Gli indici di forma sono volti a misurare due caratteristiche

- *La simmetria* ovvero il fatto che le osservazioni si distribuiscano in modo simmetrico rispetto al valore centrale. Gli indici utilizzabili a questo scopo sono il momento centrale terzo, il momento centrale terzo normato (o standardizzato), il coefficiente di skewness (o di asimmetria) di Pearson.
- *La curtosi* ovvero il fatto che le osservazioni si distribuiscano in modo simile ad una distribuzione di tipo gaussiano (o normale). Gli indici utilizzabili a questo scopo sono il momento centrale quarto, il momento centrale quarto normato (o standardizzato), l'eccesso curtosi,

Nessuno degli indici summenzionati può essere calcolato per caratteri qualitativi quale quello in esame.

Esercizio 2)

Possiamo modellare il processo di generazione dei dati del presentati nell'esercizio come il frutto di diverse estrazioni dalla variabile casuale

P : *numero di ore giornaliere in cui una persona usa il cellulare.*

avente distribuzione ignota. Si sono effettuate $n = 40$ osservazioni i. i. d. in cui si son rilevate $M = 3$ modalità.

Continuando con il modello precedentemente definito l'esercizio richiede di stimare $E[P]$ puntualmente e per intervallo.

La stima è possibile solo se la le estrazioni sono indipendenti ed identicamente distribuite e se la dimensione del campione è pari ad almeno 30 unità. Nel caso in esame entrambe le ipotesi si possono considerare verificate.

Lo stimatore puntuale del valore atteso è la media campionaria che, utilizzando i conti riportati in tabella produce la seguente stima

$$E\hat{[}P]=\bar{y}=\sum_{i=1}^{M} f_i * y_i = 3$$

Per ottenere la stima per intervallo occorre fissare un livello i di confidenza α. Posto α= *90%,* la stima per intervallo è in caso che la varianza della popolazione sia ignota è data dalla

$$E[P]\in\left[\bar{y}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} \;\; ; \;\; \bar{y}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

ricordando la formula del calcolo della varianza campionaria ed utilizzando i conti riportati in tabella si ha che:

$$s^2=\sigma^2\frac{n}{n-1}=\left(\sum_{i=1}^{M} f_i * y_i^2-\bar{y}^2\right)\frac{n}{n-1}=\left(1.6-1^2\right)\frac{40}{39}=0.6153 \qquad z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$$

Pertanto l'intervallo richiesto è: $E[X]\in\left[1-1.96\sqrt{\frac{0.6156}{40}} \;\; ; \;\; 1+1.96\sqrt{\frac{0.6156}{40}}\right]=[0.876 \;\; ; \;\; 1.124]$

y_i	n_i	f_i	n_i*f_i	y_i^2	$y_i^2*f_i$
0	12	0.300	0.000	0	0
1	16	0.400	0.400	1	0.4
2	12	0.300	0.600	4	1.2
Totali	40	1	1		1.6

Esercizio 3)
Unendo i dati dei primi due esercizi si ottiene la seguente bivariata (x, y) dove

X: grado di penetrazione delle onde, Y: ore giornaliere in cui una persona usa il cellulare

a) raccolga i dati in una tabella a doppia entrata
Le osservazioni posso essere raccolte nella seguente tabella a doppia entrata.

	Y: Ore giornaliere			**Totale complessivo**
X: grado di penetrazione	**0**	**1**	**2**	
Alto	6	6	4	**16**
Medio	4	6	6	**16**
Basso	2	4	2	**8**
Totale complessivo	**12**	**16**	**12**	**40**

b) indichi il carattere della serie bi-variata ottenuta
La serie bivariata è data dall'unione di un carattere qualitativo ed un quantitativo pertanto non presenta un carattere preciso.

c) Se possibile calcoli un indice sintetico di posizione
L'unico indice di posizione calcolabile per la serie in esame è la moda corrispondente alla modalità avente frequenza relativa maggiore. Questo caso vi sono 4 modalità che soddisfano questo requisito.

(Alto; 0) (Alto; 1) (Medio; 1) (Medio; 2)

d) Il candidato verifichi se esiste un legame fra le ore di uso quotidiano del cellulare ed il grado di penetrazione

delle onde, evidenziando le necessarie ipotesi. Il candidato proceda al calcolo anche se queste non fossero verificate.

E' possibile rispondere al quesito mediante un particolare test di ipotesi: il test di indipendenza. Il test sfrutta la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica. Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n\,\hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+}\, n_{+,j}}{n} \quad \forall\, i,\, j$$

Le frequenze teoriche risultano essere le seguenti:

	Y: Ore giornaliere			Totale complessivo
X: grado di penetrazione	**0**	**1**	**2**	
Alto	4.8	6.4	4.8	**16**
Medio	4.8	6.4	4.8	**16**
Basso	2.4	3.2	2.4	**8**
Totale complessivo	**12**	**16**	**12**	**40**

A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. La condizione non è verificata ma il testo richiede comunque di continuare il procedimento.

Poiché entrambi i caratteri della bi-variata hanno 3 modalità ($M_x = M_y = 3$), la regione di accettazione per un test al *5 %* è la seguente.

$$A = \left[0\,;\, \chi^2_{0.95}\left((M_x - 1) * (M_y - 1)\right)\right] = \left[0\,;\, \chi^2_{0.95}(4)\right] = [0\,;\, 9.488]$$

Per valutare l'ipotesi di indipendenza non rimane che da calcolare il valore dello stimatore e verificare se appartiene alla regione di accettazione. Il valore dello stimatore è

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\left(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j}\right)^2}{\hat{n}_{i,j}} = \frac{(6-4.8)^2}{4.8} + \frac{(6-6.4)^2}{6.4} + \frac{(4-4.8)^2}{4.8} + \frac{(4-4.8)^2}{4.8} + \frac{(6-6.4)^2}{6.4} +$$
$$+ \frac{(6-4.8)^2}{4.8} + \frac{(2-2.4)^2}{2.4} + \frac{(4-3.2)^2}{3.2} + \frac{(2-2.4)^2}{2.4} = 1.25$$

e risulta interno ad A. Quindi l'ipotesi di indipendenza viene accettata.

e) Qualora un legame esistesse indichi la natura del legame.

Poiché i caratteri sono indipendenti non vi è nessun legame.

Esercizio 4)

Nel testo si considerano come eventi elementari delle estrazioni da due vv. cc. continue. Si ricorda che per una v.c. continua X, la probabilità di ottenere una realizzazione x compresa fra due estremi x_{inf} ed x_{sup} è data dall'integrale (area sottesa) dalla densità di probabilità $f_X(x)$ fra x_{inf} ed x_{sup}. In simboli

$$P\left(x \in \left[x_{inf}\,;\, x_{sup}\right]\right) = \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} f_X(\tau)\, d\tau$$

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.

Per il calcolo di $P(E_1)$, si deve calcolare l'area sottesa dalla curva della densità di probabilità di una normale con valore atteso *2* varianza unitaria da meno infinito a 1. Purtroppo integrare le d.d.p. di una normale qualsiasi non è agevole solitamente si ricorre alla variabile normale standardizzata Z ($N(0;1)$). Pertanto si deve trasporre l'evento di estrazione da X all'estrazione da Z mediante la standardizzazione dei valori coinvolti.

$$x_{inf}=-\infty \rightarrow z_{inf}=\frac{x_{inf}-E[X]}{Var[X]}=\frac{-\infty-2}{1}=-\infty \qquad x_{sup}=-1 \rightarrow z_{sup}=\frac{x_{sup}-E[X]}{Var[X]}=\frac{1-2}{1}=-1$$

Pertanto ha la seguente equivalenza

$$P(E_1)=P(x\in[-\infty;1])=P(z\in[-\infty;-1])=\int_{-\infty}^{-1} f_Z(\tau)d\tau$$

Infine ricordando che, la d.d.p. di una qualsiasi gaussiana è simmetrica rispetto al valore atteso e che sulle tavole periodiche si riportano solo gli integrali fra 0 e un valore positivo si ha che

$$P(E_1)=\int_{-\infty}^{-1} f_Z(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{0} f_Z(\tau)d\tau-\int_{-1}^{0} f_Z(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{0} f_Z(\tau)d\tau-\int_{0}^{1} f_Z(\tau)d\tau=0.5-0.3413=0.1587$$

La probabilità dell'evento E_2 è pari alla probabilità di estrarre un numero *y* positivo da una v. c. uniforme fra *-2* ed *1*. In questo caso è possibile ricavare la d.d.p. della v.c. *Y*. Basta imporre che l'area sottesa dalla d.d.p. sia unitaria.

Pertanto si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(\tau)d\tau=1$$

poiche la d.d.p è nulla per valori esterni all'intervallo *[-2; 1]* la predente diviene

$$\int_{-2}^{+1} f_Y(\tau)d\tau=1$$

ricordando che la d.d.p. è costante si ha che

$$\int_{-2}^{+1} Cd\tau=(1-(-2))C=3C=1$$

da cui si ha che C= 1/3.

Il calcolo della probabilità richiesta diviene ora facile

$$P(E_2)=P(y>0)=\int_{0}^{+1}\frac{1}{3}d\tau=(1-0)\frac{1}{3}=0.3333$$

Propedeutico al calcolo delle altre due probabilità e il calcolo della probabilità dell'evento intersezione (ovvero che i due eventi si verifichino contemporaneamente). Per eventi indipendenti essa è il prodotto delle due probabilità ovvero

$$P(E_1\cap E_2)=P(E_1)P(E_2)=0.1587\cdot 0.3333=0.0529$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)=0.1587+0.3333-0.0529=0.4391 \qquad P(E_1|E_2)=\frac{P(E_1\cap E_2)}{P(E_2)}=\frac{0.0529}{0.3333}=0.1587$$

b) Il candidato fornisca la definizione dei seguenti eventi notevoli: eventi statisticamente indipendenti, evento certo ed evento impossibile.

Due eventi si dicono

- *statisticamente indipendenti* se il verificarsi di un evento non altera la probabilità del verificarsi dell'altro. Se A e B sono due eventi statisticamente indipendenti si ha che

  $$P(A|B) = P(A) \qquad P(B|A) = P(B)$$

- *certo*: un evento certo è un evento che si verifica sempre. Se E è un evento certo certo si ha che *P(E) = 1*.
- *impossibile*: un evento impossibile è un evento che non si verifica mai. Se E è un evento impossibile certo si ha che *P(E) = 0*.