Matematica e Statistica

Prova d'esame (11/09/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Matematica e Statistica

Prova di $\boxed{\text{MATEMATICA}}$ (11/09/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO VR ······

*** *Svolgere prima i punti* (a) *di* *<u>tutti</u>* *gli esercizi; solo in seguito i punti* (b). *** **▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶**

(1) (a) Nello spazio $\mathbb{R}^3$ il piano Π passa per i punti $A(1,-1,0)$, $B(0,-1,-1)$ e $C(2,0,-1)$, mentre la retta r passa per B e per l'origine. Determinare entrambi in forma parametrica e cartesiana.

(b) Qual è il punto di Π più vicino all'origine? E quello di r più vicino ad A?

(2) Studiare (giustificando le conclusioni) la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x-1|}}{3-x}$, e tracciarne il grafico.[1]

(3) (a) Calcolare gli integrali $\displaystyle\int_0^1 (2x - \sin(\sqrt{x}\,))\,dx$ e $\displaystyle\int_0^3 x \log|x+1|\,dx$.

(b) Disegnare $S = \{(x,y) : 0 < x < 4\,,\ |x-3| - 2 \le y \le \log x\,\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Data $g(x,y) = e^y(2x^2 + y^2 - 3)$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali.

(b) Calcolare gli estremi assoluti di g su quadrato $\mathcal{Q}$ di estremi $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ e $(2,2)$.

(5) Sono date le equazioni differenziali $y' = y + e^x + 2$ e $y'' + y' - 2y = 4 + 3e^x$.

(a) Trovare le soluzioni di ciascuna delle due equazioni, specificando se ve ne sono in comune.

(b) Quali delle soluzioni hanno in $x = 0$ il grafico tangente alla retta $y = 2x + 1$?

[1] Non è richiesto lo studio della convessità.

Matematica e Statistica

Prova di STATISTICA (11/09/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO VR · · · · · ·

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! **** ▶▶▶▶ **Test a quiz sul retro** ▶▶▶▶

Esercizio 1)
Una azienda statunitense riceve materiale da diverse filiali presenti in tutto il mondo. Nell'ultmo mese ha rivevuto 20 consegne dalle filiali romane che hanno utilizzato i seguenti corrieri.

DHL	TNT	UPS	TNT	UPS	TNT	UPS	TNT	UPS	DHL
TNT	TNT	DHL	UPS	TNT	UPS	DHL	UPS	TNT	UPS

Il candidato consideri le 20 osservazioni e

a) Determini la tipologia del carattere.
b) Descriva e calcoli un indice di posizione adeguato ai dati.
c) Descriva e calcoli un indice di variabilità adeguato ai dati.
d) Fornisca una rappresentazione grafica dei dati.

Esercizio 2)
Le 20 spedizioni hanno avuto (rispettivamente) il seguente tempo di consegna espresso in ore.

44	36	43	42	36	42	46	52	52	55
51	45	45	46	36	44	51	38	44	52

Il candidato usi le osservazioni cosi presentate per stimare puntualmente e per intervallo il valore atteso del tempo di consegna. Il candidato indichi le ipotesi necessarie e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.

Esercizio 3)
Si vuole verificare se il corriere utilizzato sia legato al tempo di consegna. A tale scopo le osservazioni riportate nel secondo esercizio sono state raccolte nelle seguenti classi di modalità

meno di 40 ore fra 40 e 50 ore oltre 50 ore

Il candidato
a) raccolga i dati presentati in una tabella a doppia entrata;
b) descriva il tipo di carattere della bivariata ottenuta;
c) se possibile calcoli un indice sintetico di posizione per la bivariata ottenuta;
d) il candidato stabilista se esite una qualche dipedenza fra i due caratteri componenti la bivariata. Il candidato indichi le ipotesi necessarie per eseguire il test e proceda al calcolo anche qualora queste non siano soddisfatte.

Esercizio 4)
Si considerino i seguenti eventi dichiarati indipendenti.

E_1 : si ottenga $x \geq 0$ dove x è estratto da una v. c. distribuita come una normale standardizzata.
E_2: si ottenga y<0 dove y è estratto da una v. c. *Unif(-6;6)*.

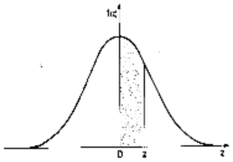
a) Il candidato calcoli le seguenti probabilità sapendo che i due eventi sono indipendenti

$$P(E_1);\ P(E_2);\ P(E_1 \cap E_2)\ P(E_1\ U\ E_2)\ P(E_1 | E_2).$$

b) Il due eventi possono essere considerati complementari?.

Tavola I

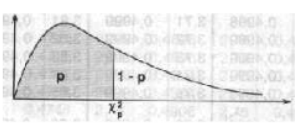
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.



ν \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

Soluzioni

MATEMATICA

(1) (a) Il piano Π, passando per $A(1,-1,0)$, $B(0,-1,-1)$ e $C(2,0,-1)$ sarà parallelo ai vettori $A-B=(1,0,1)$ e $C-B=(2,1,0)$ (non paralleli tra loro), dunque una forma parametrica sarà $\Pi=\{(1,-1,0)+s(1,0,1)+t(2,1,0): s,t\in\mathbb{R}\}=\{(1+s+2t,-1+t,s): s,t\in\mathbb{R}\}$. La forma cartesiana si può ricavare dalla formula del piano per tre punti, o da quella parametrica: sostituendo $s=z$ e $t=y+1$ in $x=1+s+2t$ si ottiene $x=1+z+2y+2$, ovvero $x-2y-z-3=0$. • La retta r, passante per B e per l'origine, sarà parallela al vettore-posizione di B e avrà dunque forma parametrica $r=\{(0,0,0)+t(0,-1,-1): t\in\mathbb{R}\}=\{(0,-t,-t): t\in\mathbb{R}\}$; da $t=-z$ si ottiene una forma cartesiana dal sistema tra le due equazioni $x=0$ e $y=z$.

(b) Il punto generico del piano Π è come visto del tipo $P(s,t)=(1+s+2t,-1+t,s)$ con $s,t\in\mathbb{R}$: (il quadrato del)la distanza dal piano è $f(s,t)=(1+s+2t)^2+(-1+t)^2+s^2=2s^2+4st+5t^2+2s+2t+2$. Vale $\frac{\partial f}{\partial s}=4s+4t+2$ e $\frac{\partial f}{\partial t}=4s+10t+2$, e il sistema $\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial t}=0$ ha l'unica soluzione $(s_0,t_0)=(-\frac{1}{2},0)$ che il criterio dell'hessiano mostra subito essere punto di minimo. Il punto cercato è dunque $P(-\frac{1}{2},0)=(\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2})$. • Il quadrato della distanza tra il punto generico $Q(t)=(-t,-t,0)$ della retta r e il punto $A(1,-1,0)$ è dato da $g(t)=(1+t)^2+(-1+t)^2=2(t^2+1)$, che diventa evidentemente minimo per $t=0$: il punto cercato è perciò $Q(0)=(0,0,0)$, l'origine.

(2) (Figura 1) La funzione $f(x)=\frac{\sqrt{|x-1|}}{3-x}$ è definita per $x\neq 3$, e nel dominio è derivabile infinite volte tranne che per $x=1$ ove (a causa di modulo e radice) è continua ma assai probabilmente non derivabile. Si annulla per $x=1$, e vale $f(x)>0$ per $x<3$. I limiti interessanti sono in $\mp\infty$ e in $3^{\mp}$: quelli determinati sono $\lim_{x\to 3^{\mp}} f(x)=\pm\infty$, mentre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ è in forma indeterminata ma si vede facilmente (con de l'Hôpital, o raccogliendo $\sqrt{|x|}$ sopra e x sotto) che vale $0^{\mp}$: dunque $y=0$ è asintoto orizzontale bilatero. Derivando per $x\neq 1$ e ponendo $\sigma=\operatorname{sign}(x+1)$ si ottiene $f'(x)=\frac{\frac{\sigma}{2\sqrt{|x-1|}}(3-x)-(-1)\sqrt{|x-1|}}{(3-x)^2}=\sigma\frac{x+1}{2\sqrt{|x-1|}(3-x)^2}$, dunque vale $f'(x)=0$ per $x=-1$ e $f'(x)>0$ per $x<-1$, per $1<x<3$ e per $x>3$: poiché inoltre $\lim_{x\to 1^{\mp}} f'(x)=\mp\infty$ (dunque per $x=1$ il grafico di f ha una cuspide), concludiamo che $x=-1$ è punto di massimo relativo (con $f(-1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\sim 0{,}35$) e $x=1$ è punto di minimo relativo singolare (con $f(1)=0$).

(3) (a) Separando i due addendi, ponendo $x=t^2$ e integrando per parti si ha $\int_0^1(2x-\sin(\sqrt{x}))\,dx=(x^2]_0^1-2\int_0^1 t\sin t\,dt=1-2(\sin t-t\cos t]_0^1=1-2(\sin 1-\cos 1)\sim 0{,}4$. • Integrando per parti si ha $\int_0^3 x\log|x+1|\,dx=(\frac{1}{2}x^2\log|x+1|]_0^3-\int_0^3\frac{1}{2}x\frac{1}{x+1}\,dx=9\log 2-\frac{1}{2}(x-\log|x+1|]_0^3=9\log 2-\frac{1}{2}(3-2\log 2)=8\log 2-\frac{3}{2}\sim 4{,}0$.

(b) (Figura 2) L'area di S risulta $\int_1^4\log x\,dx+\int_4^3(x-5)\,dx+\int_3^1(1-x)\,dx=(x(\log x-1)]_1^4+(\frac{1}{2}x^2-5x]_4^3+(x-\frac{1}{2}x^2]_3^1=(4(2\log 2-1))-(-1)+(-\frac{21}{2})-(-12)+(\frac{1}{2})-(-\frac{3}{2})=8\log 2+\frac{1}{2}\sim 6{,}0$.

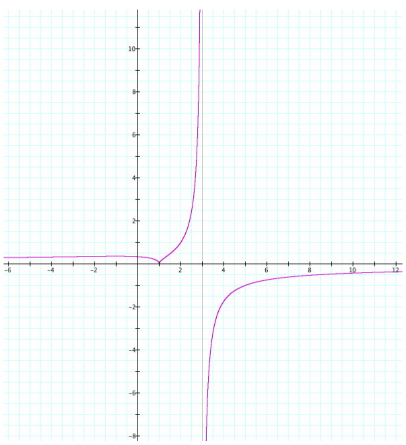
(4) (a) (Figura 3) Il dominio di $g(x,y)=e^y(2x^2+y^2-3)$ è tutto il piano $\mathbb{R}^2$; si tratta di una funzione differenziabile in tutto il dominio, in quanto le derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x}=4x\,e^y$ e $\frac{\partial g}{\partial y}=(2x^2+y^2+2y-3)e^y$ risultano continue. La funzione si annulla quando $2x^2+y^2-3=0$, ovvero $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con $a=\sqrt{\frac{3}{2}}$ e $b=\sqrt{3}$: si tratta dell'ellisse centrata nell'origine e di semiassi a e b. Si ha poi $g(x,y)>0$ quando $2x^2+y^2-3>0$, ovvero $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$, fuori dall'ellisse. L'unico limite interessante è a ∞_2, che sembrerebbe essere $+\infty$ mentre in realtà non esiste: infatti sull'asse y la funzione vale $g(0,y)=e^y(y^2-3)$, che per $y\to+\infty$ tende a $+\infty$ mentre per $y\to-\infty$ tende a 0^+. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=0$: da $\frac{\partial g}{\partial x}=0$ si ricava $x=0$, che messo in $\frac{\partial g}{\partial y}=0$ dà $y^2+2y-3=0$, con soluzioni $y=1$ e $y=-3$: otteniamo dunque i punti $P(0,1)$ e $Q(0,3$. La matrice hessiana di g risulta $\mathsf{H}_g(x,y)=\begin{pmatrix} 4\,e^y & 4x\,e^y \\ 4x\,e^y & (2x^2+y^2+4y-1)e^y \end{pmatrix}$; essendo $\mathsf{H}_g(P)=\begin{pmatrix} 4e & 0 \\ 0 & 4e \end{pmatrix}$ e $\mathsf{H}_g(Q)=\begin{pmatrix} 4\,e^{-3} & 0 \\ 0 & -4\,e^{-3} \end{pmatrix}$, il criterio dell'hessiano ci dice subito che P è un punto di minimo locale mentre Q è un punto di sella.

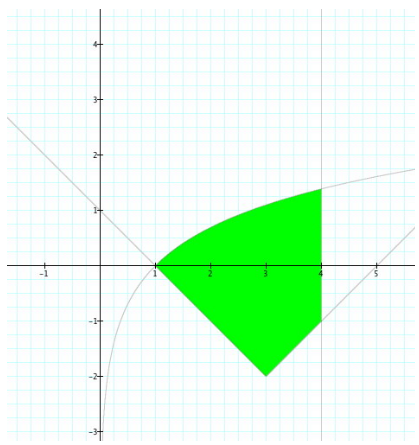
(b) (Figura 3) Gli estremi assoluti di g sul quadrato $\mathcal{Q}$ di estremi $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(0,2)$ e $C(2,2)$ esistono in base a Weierstrass, essendo $\mathcal{Q}$ un sottoinsieme compatto —ovvero chiuso e limitato— interamente contenuto nel dominio di g, che è continua. Per la ricerca dividiamo $\mathcal{Q}$ nelle zone $\mathcal{Q}_0$ dei suoi punti interni; $\mathcal{Q}_1$ del lato orizzontale OA privato dei vertici; $\mathcal{Q}_2$ del lato verticale AC privato dei vertici; $\mathcal{Q}_3$ del lato orizzontale BC privato dei vertici; $\mathcal{Q}_4$ del lato verticale OB privato dei vertici; e $\mathcal{Q}_5=\{O, A, B, C\}$ dei vertici. • Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{Q}_0$, tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per g. Ora, come visto prima i punti stazionari di g sono P e Q, nessuno dei quali però sta in $\mathcal{Q}_0$. • Sul lato orizzontale $\mathcal{Q}_1$ la funzione vale $\varphi_1(x):=g(x,0)=2x^2-3$, con $0<x<2$. Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di

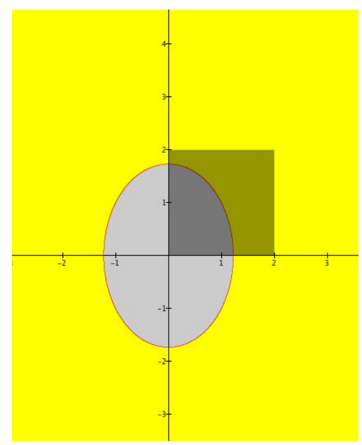
$\mathcal{Q}_1$, in tale punto dovrebbe annullarsi la derivata $\varphi_1'(x) = 4x$, il che accade solo quando $x = 0$, non accettabile. La stessa cosa accade sull'altro lato orizzontale $\mathcal{Q}_3$, in cui la funzione vale $\varphi_3(x) := g(x, 2) = e^2(2x^2 + 1)$ con $0 < x < 2$ e la derivata è $\varphi_3'(x) = 4e^2 x$. • Sul lato verticale $\mathcal{Q}_2$ la funzione vale $\varphi_2(y) := g(2, y) = e^y(y^2 + 5)$, con $0 < y < 2$; ma la derivata $\varphi_2'(y) = e^y(y^2 + 2y + 5)$ non si annulla mai. • Sul lato verticale $\mathcal{Q}_4$ la funzione vale $\varphi_4(y) := g(0, y) = e^y(y^2 - 3)$ con $0 < y < 2$, e la derivata $\varphi_4'(y) = e^y(y^2 + 2y - 3)$ si annulla per $y = 1$ (accettabile) e $y = -3$ (no): ritroviamo così il già noto punto di minimo locale $P(0, 1)$, ora candidato a diventare punto di minimo assoluto per g su $\mathcal{Q}$. • Infine, i punti O, A, B, C di $\mathcal{Q}_5$ vanno tenuti tutti presenti. • Gli estremi assoluti di g su $\mathcal{Q}$ potranno dunque assunti solo nell'ambito del punto P e dei quattro vertici O, A, B, C: poiché $g(P) = -2e \sim -5{,}5$, $g(0) = -3$, $g(A) = 5$, $g(B) = e^2 \sim 7{,}4$ e $g(C) = 9e^2 \sim 66{,}5$, il massimo assoluto di g su $\mathcal{Q}$ è $9e^2$ (assunto in C) e il minimo assoluto è $-2e$ (assunto in P).

(5) (a) L'equazione differenziale $y' = y + e^x + 2$ è lineare del primo ordine, e si scrive come $y' + p(x)\,y = q(x)$ con $p(x) = -1$ e $q(x) = e^x + 2$: essendo $P(x) = \int p(x)\,dx = -x$ e $\int e^{P(x)} q(x)\,dx = \int (1 + 2e^{-x})\,dx = x - 2e^{-x}$, la soluzione generale è $y(x) = e^x(x - 2e^{-x} + k) = (x + k)e^x - 2$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. • L'equazione $y'' + y' - 2y = 4 + 3e^x$ è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 + t - 2 = 0$ ha soluzioni $t = -2$ e $t = 1$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = A\,e^x + B\,e^{-2x}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per il termine non omogeneo 4 è evidentemente la costante -2 mentre (essendo 1 radice caratteristica) una soluzione particolare per il termine non omogeneo $3e^x$ sarà del tipo axe^x con $a \in \mathbb{R}$ da determinare, e i conti danno $a = 1$: dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione completa è $y(x) = (x + A)\,e^x + B\,e^{-2x} - 2$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. • Notiamo che tutte le soluzioni della prima equazione lo sono anche della seconda (con $A = k$ e $B = 0$).

(b) La richiesta che in $x = 0$ il grafico di $y(x)$ sia tangente alla retta $y = 2x + 1$ si può riformulare chiedendo che $y(0) = 1$ e che $y'(0) = 2$. Imponendo alle soluzioni della prima equazione $y = (x + k)e^x - 2$ che $y(0) = 1$ si ottiene $1 = k - 2$ ovvero $k = 3$; derivando allora $y = (x + 3)e^x - 2$ si ha $y' = (x + 4)e^x$, e imponendo che $y'(0) = 2$ si ha $2 = 4$, assurdo. Dunque nessuna delle soluzioni della prima equazione soddisfa le condizioni richieste. Imponendo alle soluzioni della seconda equazione $y = (x + A)\,e^x + B\,e^{-2x} - 2$ che $y(0) = 1$ si ha $1 = A + B - 2$, ovvero $B = 3 - A$; derivando allora $y = (x + A)\,e^x + (3 - A)\,e^{-2x} - 2$ si ha $y' = (x + A + 1)\,e^x - 2(3 - A)\,e^{-2x}$, e imponendo che $y'(0) = 2$ si ha $2 = (A + 1) - 2(3 - A)$, ovvero $A = \frac{7}{3}$, da cui $B = \frac{2}{3}$. Dunque l'unica soluzione della seconda equazione che soddisfa le condizioni richieste è $y = (x + \frac{7}{3})\,e^x + \frac{2}{3}\,e^{-2x} - 2$.







1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. (4.b): zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g; il punto stazionario (porpora); l'insieme $\mathcal{Q}$ (azzurro).

STATISTICA

Esercizio 1)

a) Determini la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo qualitativo (in quanto espresso da etichette) non ordinabili in quanto non è possibile dare un ordine alle osservazioni.

b) Descriva e calcoli un indice di posizione adeguato ai dati.

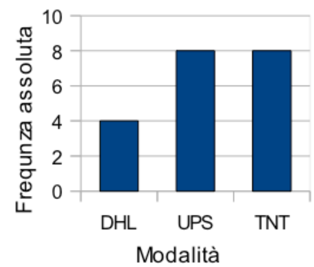
Pe questa tipologia di dati è possibile calcolare solo la moda che rappresenta la modalità cui corrisponde la massima frequenza . Raccogliendo le osservazioni in Tabella 1 si ha che la moda è data dalle modalità UPS e TNT. Si parla infatti di serie bimodale.

c) Descriva e calcoli un indice di variabilità adeguato ai dati.

Per i dati in esame non è possibile indicare alcun indice di variabilità

d) Fornisca una rappresentazione grafica dei dati.

Una rappresentazone opportuna è data dal diagramma a barre ripostato a lato.



x_i	n_i
TNT	4
UPS	8
DHL	8
Totale	20

Tabella 1 - Dati relativi all'esercizio 1.

Esercizio 2)

L'esercizio richiede di stimare il valore atteso della seguente variabile

Y: tempo di consegna di un pacco provenінete da Roma

Di cui sono state raccolte 20 osservazioni raccolte nella Tabella 2 in cui si riscontrano 10 modalità y_i

Le ipotesi necessarie per la stima con i metodi visti a lezione prevedono.

- Almeno treta osservazioni (non soddisfata)
- Estrazioni i.i.d. (una traduzione può essere che il fatto che un pacco sia consegnato da un corriere o da un altro non influenza il tempo di arrivo. Questa ipotesi non sembra essere pienamente soddisfatta)

y_i	n_i	$y_i\, n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_i$
36	3	108	-9	81	243
38	1	38	-7	49	49
42	2	84	-3	9	18
43	1	43	-2	4	4
44	3	132	-1	1	3
45	2	90	0	0	0
46	2	92	1	1	2
51	2	102	6	36	72
52	3	156	7	49	147
55	1	55	10	100	100
	20	900			638

Tabella 2 - Dati relativi all'esercizio 2.

La stima puntuale si ha ricordando che lo stimatore dell valore atteso è la media campionarià, pertanto si ha che

$$E[\hat{Y}]=\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{10} y_i * n_i}{N}=\frac{00}{20}$$

Nel caso in esame la Varianza di Y non è nota pertanto la stima per intervallo è data dalla seguente:

$$\left[\bar{y}+z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{N}}\,;\,\bar{y}+z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{N}}\right]$$

Fissato il livello di confidenza α al10 % si ha che

$$z_{0.05}=-1.65 \qquad\qquad z_{0.95}=1.65$$

Mentre dai dati in Tabella 2 si ricava che

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2}{N-1}}=\sqrt{\frac{638}{19}}=5.79$$

Da cui si ha la stima per intervallo richiesta

$$\left[45-1.65\frac{5.79}{\sqrt{20}}\,;\,10+1.65\frac{5.79}{\sqrt{20}}\right]=[45-2.14\,;45+2.14]=[42.86\,;\,47.14]$$

Esercizio 3)

a) raccolga i dati relativi alle ossevazioni estive ed invernali in una tabella a doppia entrata;

Una volta raccolte le osservazioni dell'esercizio 1 e 2 in classi coerenti con quelle descritte nell'esercizio 3 si ha la seguente tabella:

		Y: tempo di consegna (ore)			Totale
		meno di 40	fra 40 e 50	oltre 50	
X: coriere	UPS	2 (1.6)	4 (4)	2 (2.4)	8
	TNT	2 (1.6)	4 (4)	2 (2.4)	8
	DHL	0 (0.8)	2 (2)	2 (1.2)	4
Totale		4	10	6	20

Tabella 3 Dati esercizio 3

b) descriva il tipo di carattere della bivariata ottenuta;

La bivariata raccoglie un carattere qualitativo (X) ed un carattere quantitiativo (Y) pertanto non ha alcun carattere proprio.

c) se possibile calcoli un indice sintetico di posizione per la bivariata ottenuta;

L'unico indice che si può calcolare, di quelli visti a lezione, per questo tipo di bivariata è la moda. che risulta essere non unica, anche in questo caso si ha una bimodale con i seguenti valori

(TNT, fra 40 e 50) (UPS, fra 40 e 50)

d) il candidato stabilisca se esite una qualche dipedenza fra i due caratteri componenti la bivariata. il candidato indichi le ipotesi necessarie per eseguire il test e proceda al calcolo anche qualora queste non siano soddisfatte.

Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficiente mente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendeza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti-Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà paria quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j}=n\,\hat{p}_{i,j}=\frac{n_{i,+}\,n_{+,j}}{n} \quad \forall i,j$$

nella Tabella 3 si ripotano le frequenze marginali e quelle teoriche fra parentesi.A questo punto è possibile valutare la convergenza dell stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. La condizione non è verificata ma il testo indica di proseguire in ogni caso.
La regione di accettazione fissato il livello di significatività al 5% risulta essere .

$$A=\left[0\,;\chi^2_{1-\alpha}\left((M_x-1)(M_y-1)\right)\right]=\left[0\,;\chi^2_{1-0.05}\left((3-1)(3-1)\right)\right]=\left[0\,;\chi^2_{0.95}(4)\right]=[0\,;9.488]$$

Si può ora procedere al calcolo dello stimatore vero e proprio

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{(n_{i,j}-\hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}}=\frac{(2-1.6)^2}{1.6}+\frac{(4-4)^2}{4}+\frac{(2-2.4)^2}{2.4}+\frac{(2-1.6)^2}{1.6}+\frac{(4-4)^2}{4}+\frac{(2-2.4)^2}{2.4}+\frac{(0-0.8)^2}{0.8}+\frac{(2-2)^2}{2}+\frac{(2-1.2)^2}{1.2}=1.67$$

Poichè il valore dello stimatore è interno all'intervallo di accettazione si può affermare che i due caratteri sono indipendenti ad un livello di significatività del 5% (ovvero il corriere non influisce sul tempo di consegna).

Esercizio 4)
a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità sapendo che la probabilità che i due eventi si verifichino contemporaneamente è pari al 10%:

P(E₁): è la probabilità di estrarre da una gaussiana standardizzata un numero non negativo. Nella gaussiana standard l'asse X=0 è asse di simmetria della gaussiana, quindi l'area sottesa dalla curva da meno infinito a zero (P(x<0)); coincide con quella sottesa dallo zero a più infinito P(x>0). Inoltre essendo la loro somma pari all'unità si ha che $P(E_1) = 0.5$

$P(E_2)$ per calcolare la probablità richiesta poò essere utile disegnare la d.d.p. in esame. Essa sarà uniforme fra -6 e 6 ad un valore K e nulla dalle altre parti. L'area sottesa dalla curva pertanto sarà un rettangolo di base 12 (6-(-6)) e di altezza K. Ricordando che l'area sottesa da un d.d.p. è unitaria si ha che 12K = 1 da cui K = 1/12. L'area che determina $P(E_2)$ è quella di un rettangolo con base 6 (da -6 a 0) ed altezza 1/12 da cui si ha che $P(E_2) = 0.5$.

Le restanti probabilità si calcolano utilizzando le definzioni assiomatiche:

$P(E_1 \cap E_2)=0.5*0.5=0.25$ (si ricorda che la formula a lato vale solo per eventi indipendenti)

$$P(E_1 \cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1 \cap E_2)=0.5+0.5-0.5*0.5=0.75$$

$$P(E_1|E_2)=\frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}=\frac{0.25}{0.5}=0.5$$

b) Il due eventi possono essere considerati complementari?
Due eventi si dicono complementari se il verificarsi di uno implica il non veriricarsi dell'altro è viceversa. Pertanto essi non possono mai essere verificati insieme. Poiche la probabilita dell'evento intersezione e non nulla, i due eventi non posso dirsi complementari.