

Vediamo come usare l'operatore "\" per risolvere un sistema lineare.

$$A \underline{x} = \underline{b} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{x}_{\text{vera}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{b} = A \underline{x}_{\text{vera}}$$

```
>> A = [1 2; 3 4]
```

```
A =
```

```
1 2
3 4
```

```
>> xvera = [1;2]
```

```
xvera =
```

```
1
2
```

```
>> b = A*xvera
```

```
b =
```

```
5
11
```

```
>> xmatlab = A\b
```

```
xmatlab =
```

```
1
2
```

```
>>
```

ESEMPIO

Trovare le soluzioni di

$$z^3 = 1 \quad \text{con } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

Il sistema da risolvere è il seguente:

$$(x + iy)^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 = 1 + i0$$

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 - 1 = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \text{"} f_1(x,y) = f_1(x_1, x_2) \\ \text{"} f_2(x,y) = f_2(x_1, x_2) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - 1 = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} f_1(x,y) &= f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x,y) &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

La matrice Jacobiana è

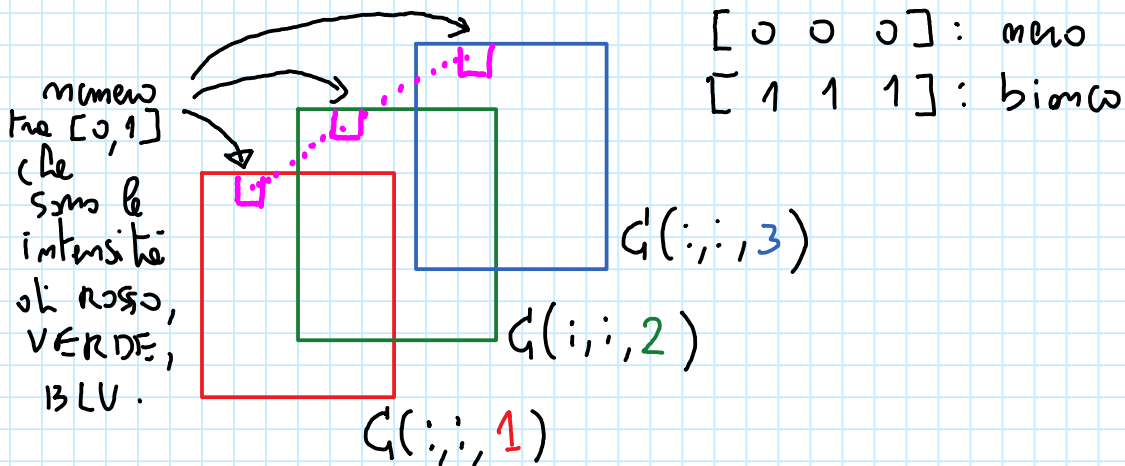
$$J(x) = J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

Vediamo come scrivere in Matlab

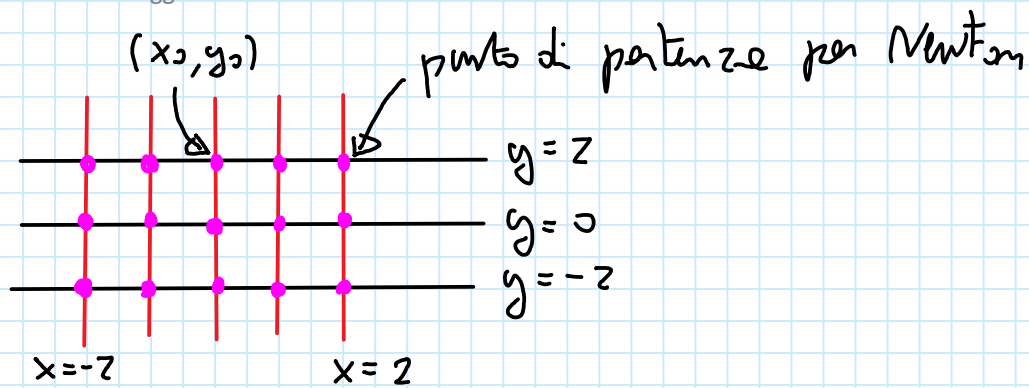
$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= -J^{-1}(x_k) \cdot f(x_k) \Leftrightarrow \\ J(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) &= -f(x_k) \xRightarrow{\text{matlab}} x_{k+1} - x_k = -J(x_k) \setminus f(x_k) \\ &\Rightarrow x_{k+1} = x_k - J(x_k) \setminus f(x_k) \end{aligned}$$

IMMAGINI IN MATLAB

Posso memorizzare una immagine usando i tre colori base, red, green, blue, come matrice di pixel:



Per visualizzare uso `image(G)`.
 $\hookrightarrow$ doc image.



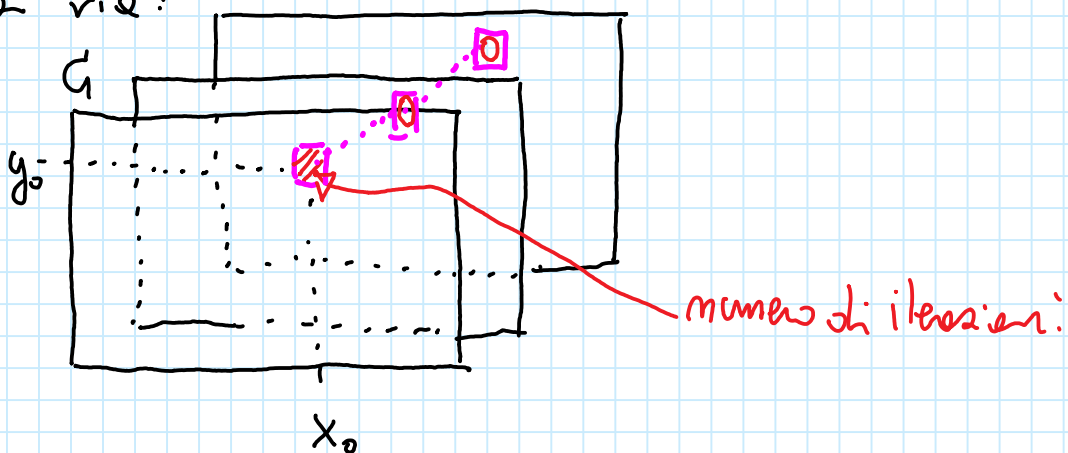
Voglio vedere, per ogni punto, a quale radice, z_1, z_2 o z_3 , converge il metodo ed in quante iterazioni; e cioè:

$z_1 \leftrightarrow$ rosso

$z_2 \leftrightarrow$ verde

$z_3 \leftrightarrow$ blu

Allora se per (x_0, y_0) il metodo converge alle radici z_1 , dico che converge verso la radice rossa e così via:



codici

lunedì 9 maggio 2016

08:31

```
function y = f(x)
y = zeros(2,1);
x1 = x(1);
x2 = x(2);
y(1) = x1.^3-3*x1.*x2.^2-1;
y(2) = 3*x1.^2.*x2 -x2.^3;
```

```
function jx = J(x)

x1 = x(1);
x2 = x(2);
jx = zeros(2);
jx(1,1) = 3*x1.^2-3.*x2.^2;
jx(1,2) = -6*x1.*x2;
jx(2,1) = 6*x1.*x2;
jx(2,2) = 3*x1.^2-3*x2.^2;
```

```
function x = newton2d(x,toll,kmax)

x(:,2) = x-J(x)\f(x);

k = 2;
while( norm(x(:,k)-x(:,k-1))>=toll && k<=kmax )
    x(:,k+1) = x(:,k)-J( x(:,k) )\f( x(:,k) );
    k = k+1;
end
```

% script per la convergenza del sistema lineare $z^3=1$ con $z = x+iy$

% parametri di arresto del metodo di Newton
toll = 1E-6; % tolleranza sullo scarto
kmax = 100; % numero massimo di iterazioni

% radici del sistema
z1 = [1;0];
z2 = 0.5*[-1; sqrt(3)];
z3 = 0.5*[-1;-sqrt(3)];

% definisco la regione del piano dei punti iniziali
xmin = -2; xmax = 2; nx = 50; xvett = linspace(xmin,xmax,nx);
ymin = -2; ymax = 2; ny = 50; yvett = linspace(ymax,ymin,ny);
[X, Y] = meshgrid(xvett,yvett);

% matrice dei colori
C = zeros(ny,nx,3);

% ciclo sui punti
for iy=1:ny
 for ix=1:nx
 x = [X(iy,ix);Y(iy,ix)];
 x = newton2d(x,toll,kmax);
 % trovo la radice verso cui c'e' stata la convergenza
 z = x(:,end); % dove converge Newton
 [~,imin] = min([norm(z-z1), norm(z-z2), norm(z-z3)]);
 C(iy,ix,imin) = size(x,2)-1;
 end
end

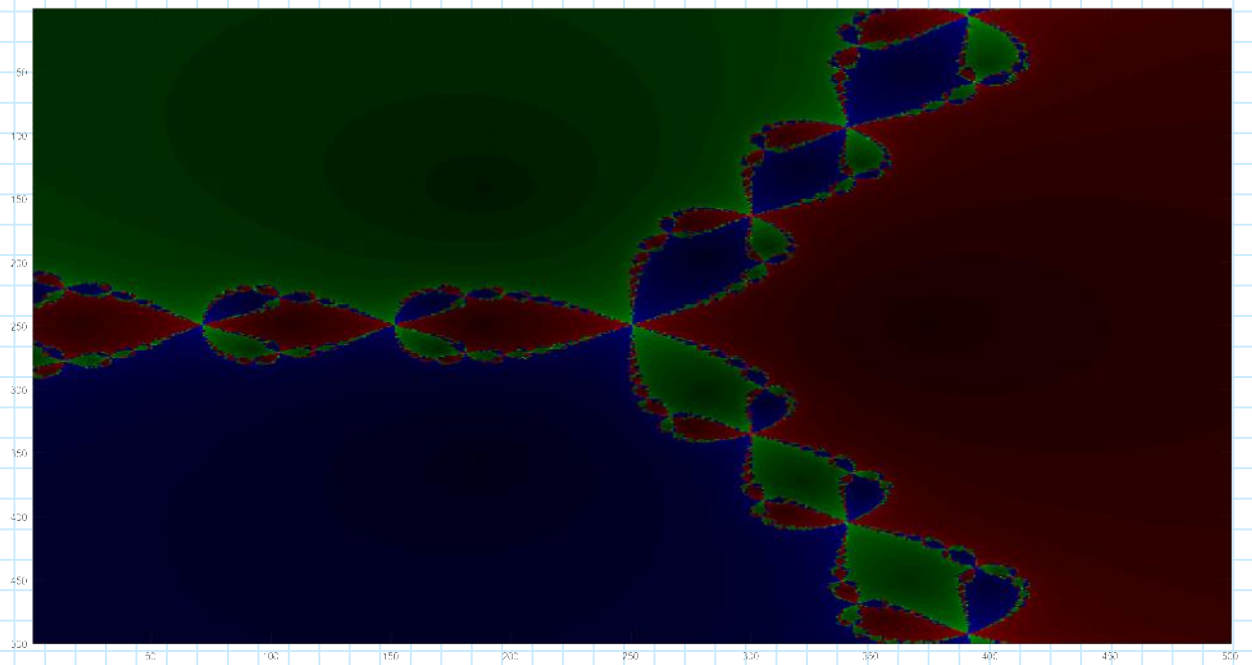
% disegno i risultati
C(:,:,1) = C(:,:,1)/max(max(C(:,:,1)));
C(:,:,2) = C(:,:,2)/max(max(C(:,:,2)));
C(:,:,3) = C(:,:,3)/max(max(C(:,:,3)));
image(C)

Esempio risultato

lunedì 9 maggio 2016

12:33

Figura ottenuta con $n_x = n_y = 500$.



Ritorniamo a Cavalieri - Simpson.

$$I_{cs} = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$\text{con } x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b, h = \frac{b-a}{2} = x_1 - x_0 = x_2 - x_1.$$

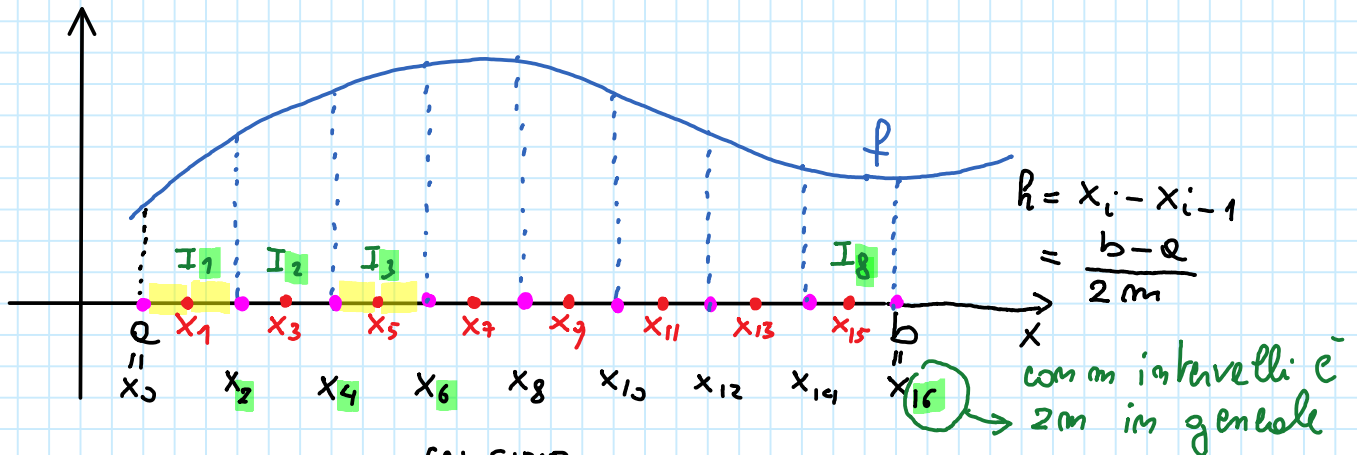
La formula, in generale, ha un errore E_{cs} che si dimostra essere esprimibile

$$\begin{aligned} E_{cs} &= -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \\ &= -\frac{[(b-a)/2]^5}{90} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

dove ξ è un punto opportuno di (a, b) , in genere NON noto.

Il problema è, che la formula di Cav-Simp. NON permette il controllo dell'errore.

FORMULA DI CAVALIERI - SIMPSON COMPOSTA



$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^m \int_{I_i} f(x) dx \stackrel{\text{Cav. SIMP.}}{\approx} \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{h}{3} \left(f(x_{2(i-1)}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i) \right\} \\ &= \frac{h}{3} \left\{ f(x_0) + 2 \sum_{\text{interni}} f(x_{2i}) + 4 \sum_{\text{interni}} f(x_{2i-1}) + f(x_{2m}) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{h}{3} \left\{ f(x_0) + 2 \sum_{\text{interni}} f(x_{2i}) + 4 \sum_{\text{interni}} f(x_{2i-1}) + f(x_{2m}) \right\}$$

$$- \frac{h^5}{90} \frac{\sum_{i=1}^m f^{(4)}(\xi_i)}{m} m$$

assunto $f^{(4)}(x)$ CONTINUA in $[a, b]$
la media è uguale a $f^{(4)}(\xi)$ con $\xi \in (a, b)$

$$= \frac{h}{3} \left\{ f(x_0) + 2 \sum_{\text{interni}} f(x_{2i}) + 4 \sum_{\text{interni}} f(x_{2i-1}) + f(x_{2m}) \right\}$$

$$- \frac{\left(\frac{b-a}{2m}\right)^5 f^{(4)}(\xi)}{90} m$$

$$= \underbrace{\frac{h}{3} \left\{ f(x_0) + 2 \sum_{\text{interni}} f(x_{2i}) + 4 \sum_{\text{interni}} f(x_{2i-1}) + f(x_{2m}) \right\}}_{I_{cs}^{(m)}} - \underbrace{\frac{(b-a)^5}{2880 m^4} f^{(4)}(\xi)}_{E_{cs}^{(m)}}$$

Una cosa posso controllare e' errore tramite m :

$$|E_{cs}^{(m)}| = \frac{(b-a)^5}{2880 m^4} |f^{(4)}(\xi)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880 m^4} M_4$$

con $M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$. Perù, dato toll , ho

$|E_{cs}^{(m)}| < \text{toll}$ se $\frac{(b-a)^5}{2880 m^4} M_4 < \text{toll}$. Da quest'ultima disuguaglianza ricavo m .

Analogamente al caso dei trapezi composta, posso leggere $E_{cs}^{(2m)}$ con $E_{cs}^{(m)}$ e ottenere una stima migliore dell'integrale. Ho

$$E_{cs}^{(m)} = - \frac{(b-a)^5}{2880 m^4} f^{(4)}(\xi_m), \quad \xi_m \in (a, b)$$

$$E_{cs}^{(2m)} = - \frac{(b-a)^5}{2880 (2m)^4} f^{(4)}(\xi_{2m}), \quad \xi_{2m} \in (a, b)$$

Allora è

$$\frac{E_{cs}^{(2m)}}{E_{cs}^{(m)}} = \frac{1}{16} \frac{f^{(4)}(\xi_{2m})}{f^{(4)}(\xi_m)} \approx \frac{1}{16} \quad \text{se } f^{(4)}(x) \text{ è abbastanza costante in } (a, b).$$

↑
è esatto se $f^{(4)}(x)$ è costante in (a, b) .

Usando questo fatto e la conoscenza di $I_{cs}^{(m)}$ e $I_{cs}^{(2m)}$ possiamo ottenere una stima migliore dell'integrale I :

$$\begin{cases} I = I_{cs}^{(m)} + E_{cs}^{(m)} \\ I = I_{cs}^{(2m)} + E_{cs}^{(2m)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \approx I_{cs}^{(m)} + 16 E_{cs}^{(2m)} \\ I = I_{cs}^{(2m)} + E_{cs}^{(2m)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_{cs}^{(m)} \approx 16 E_{cs}^{(2m)} \\ 15 I \approx 16 I_{cs}^{(2m)} - I_{cs}^{(m)} \end{cases}$$

La stima dell'integrale è

$$\hat{I} = \frac{16 I_{cs}^{(2m)} - I_{cs}^{(m)}}{15}$$

ESEMPIO Calcolare, con CAV-Simp. con $m=1$ e con $m=2$

$$I = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$$

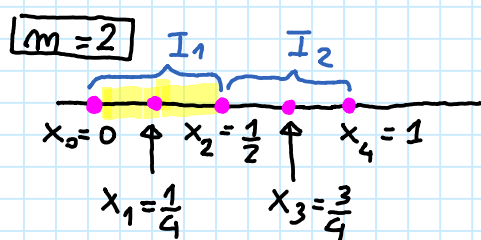
$m=1$

$$x_0=0 \quad x_1=\frac{1}{2} \quad x_2=1$$

$$a=0, \quad b=1, \quad f(x)=x^4$$

$$h = \frac{1}{2}$$

$$I_{cs}^{(1)} = I_{cs} = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = \frac{1/2}{3} \left[0^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1^4 \right] = \frac{5}{24}$$



$$a=0, b=1, f(x)=x^4$$

$$h = \frac{1}{4}$$

$$I_{cs}^{(2)} = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \left(\underbrace{f(x_1) + f(x_3)}_{\sum f(x_i) \text{ dispari interni}} \right) + 2 \underbrace{f(x_2)}_{\sum f(x_i) \text{ pari interni}} + f(x_4) \right]$$

$$= \frac{1/4}{3} \left[0^4 + 4 \left(\left(\frac{1}{4} \right)^4 + \left(\frac{3}{4} \right)^4 \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^4 + 1^4 \right] = \frac{77}{384}$$

Vediamo come migliorare questi due valori:

$$\hat{I} = \frac{16 I_{cs}^{(2m)} - I_{cs}^{(m)}}{15} = \frac{16 \cdot \frac{77}{384} - \frac{5}{24}}{15} = \frac{1}{5} \text{ valore corretto}$$

In effetti è

$$f(x) = x^4; \quad f''(x) = 4x^3; \quad f^{(2)}(x) = 12x^2; \quad f^{(3)}(x) = 24x;$$

$$f^{(4)}(x) = 24 \text{ valore costante per cui } \hat{I} = I.$$

ESEMPIO Sia

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2)$$

Calcolare quanto deve essere m per essere sicuri che $I_{cs}^{(m)}$ ha un errore minore di 10^{-6} (ossia $|E_{cs}^{(m)}| < 10^{-6}$).

$$E' \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad ; \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4} \quad ; \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

$$M_4 = \max_{x \in [1, 2]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x \in [1, 2]} \left| \frac{24}{x^5} \right| = \frac{24}{1^5} = 24$$

Sono sicuro di calcolare $I_{cs}^{(m)}$ con $|E_{cs}^{(m)}| < 10^{-6}$ se scelgo m tale da soddisfare

$$\frac{(b-a)^5}{2880 m^4} M_4 < \text{toll.} \quad \text{ossia}$$

$$\frac{(2-1)^5}{2880 m^4} \cdot 24 < 10^{-6} \Rightarrow m > \sqrt[4]{\frac{24 \cdot 10^6}{2880}} = 9.55$$

Però basta prendere $m = 10$ intervalli.

N.B: praticamente, potrebbero servire meno intervalli perché ho maggiorato $|f^{(4)}(\xi)|$ con M_4 .

OSSERVAZIONE

