

ESERCIZIO Calcolare la matrice U della fattorizzazione LU (senza pivoting) di

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Calcolare anche L e verificare che $L \cdot U = A$.

ESERCIZIO Calcolare il numero di condizionamento

$$K_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty}$$

per

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

METODI ITERATIVI (per la soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$)

Consideriamo il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ con A non singolare di ordine n .

I metodi iterativi costruiscono una successione di vettori $\underline{x}^{(k)}$ che, sotto opportune ipotesi, converge a $\underline{x}$, soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{x}$$

Vediamo un modo per costruire $\underline{x}^{(k)}$. ($|d| \neq 0$)

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff \underline{b} - A\underline{x} = \underline{0} \iff d(\underline{b} - A\underline{x}) = \underline{0}$$

$$\iff \underline{x} = \underline{x} + d(\underline{b} - A\underline{x}) \quad \text{ossia}$$

$$\underline{x} = (I_n - dA)\underline{x} + d\underline{b} \quad \text{ossia}$$

$$\underline{x} = E\underline{x} + \underline{q}$$

$\underline{x}$ è punto fisso di questa equazione; nasce l'idea di approssimare $\underline{x}$ con

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \text{ vettore iniziale (scelto a caso)} \\ \underline{x}^{(k+1)} = E \underline{x}^{(k)} + \underline{q}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (*)$$

dove E prende il nome di matrice di iterazione del metodo (e lo convergenza).

CRITERIO DI CONVERGENZA

Si può far vedere che il metodo (*) converge a $\underline{x}$ per ogni scelta di $\underline{x}^{(0)}$ se e solo se $\rho(E) < 1$.

Per la giustificazione, premettiamo il

LEMMA Per ogni matrice M , quadrata, si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k = O \iff \rho(M) < 1$$

dove O è la matrice nulla di ordine n .

Vale la

PROP. Il metodo iterativo (*) converge a $\underline{x}$ per ogni $\underline{x}^{(0)}$ se e solo se $\rho(E) < 1$.

Dim. Abbiamo

$$\underline{x} = E \underline{x} + \underline{q}$$

$$\underline{x}^{(n)} = E \underline{x}^{(n-1)} + \underline{q}$$

Sia $\underline{e}^{(n)} = \underline{x} - \underline{x}^{(n)}$ l'errore al passo n -esimo;

allora $\underline{x}^{(n)} \rightarrow \underline{x}$ se e solo se $\underline{e}^{(n)} \rightarrow \underline{0}$.

Dimostriamo che $\underline{e}^{(n)} \rightarrow \underline{0}$.

$$\underline{e}^{(n)} = \underline{x} - \underline{x}^{(n)} = (E \underline{x} + \underline{q}) - (E \underline{x}^{(n-1)} + \underline{q})$$

$$\begin{aligned}\underline{e}^{(n)} &= \underline{x} - \underline{x}^{(n)} = (\underline{E} \underline{x} + \underline{q}) - (\underline{E} \underline{x}^{(n-1)} + \underline{q}) \\ &= \underline{E} (\underline{x} - \underline{x}^{(n-1)}) = \\ &= \underline{E} \underline{e}^{(n-1)}\end{aligned}$$

così che è $\boxed{\underline{e}^{(n)} = \underline{E} \underline{e}^{(n-1)}}$.

Iterando, abbiamo

$$\begin{aligned}\underline{e}^{(n)} &= \underline{E} \underline{e}^{(n-1)} = \underline{E} (\underline{E} \underline{e}^{(n-2)}) = \underline{E}^2 \underline{e}^{(n-2)} = \\ &= \underline{E}^2 (\underline{E} \underline{e}^{(n-3)}) = \underline{E}^3 \underline{e}^{(n-3)} = \dots \\ &= \underline{E}^n \underline{e}^{(0)} \quad \text{dove } \underline{e}^{(0)} \text{ è l'errore iniziale.}\end{aligned}$$

Però

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{e}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\underline{E}^n \cdot \underline{e}^{(0)}] = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{E}^n \right) \cdot \underline{e}^{(0)} =$$

$$\stackrel{\uparrow}{\neq} 0 \cdot \underline{e}^{(0)} = \underline{0}$$

$$\rho(\underline{E}) < 1$$

e quindi il metodo converge a $\underline{x}$ indipendentemente da $\underline{x}^{(0)}$.

Possiamo avere qualche informazione in più sul comportamento dell'errore supponendo che $\underline{E}$ sia diagonalizzabile e con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ che soddisfano

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_m|.$$

Essendo $\underline{E}$ diagonalizzabile, esiste una base di autovettori che chiamiamo $\underline{u}_1$ (associato a λ_1), $\underline{u}_2$ (associato a λ_2), $\dots$

$\underline{u}_m$ (autovalore λ_m).

Quindi, essendo una base, esistono $c_1, c_2, \dots, c_m$ tali che

$$\underline{e}^{(0)} = c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2 + \dots + c_m \underline{u}_m$$

per cui

$$\underline{e}^{(k)} = E^k \underline{e}^{(0)} = E^k (c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2 + \dots + c_m \underline{u}_m) =$$

$$= c_1 E^k \underline{u}_1 + c_2 E^k \underline{u}_2 + \dots + c_m E^k \underline{u}_m =$$

$$= c_1 \lambda_1^k \underline{u}_1 + c_2 \lambda_2^k \underline{u}_2 + \dots + c_m \lambda_m^k \underline{u}_m =$$

$$= \lambda_1^k \left[c_1 \underline{u}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \underline{u}_2 + \dots + c_m \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1} \right)^k \underline{u}_m \right] \approx$$

$$\approx \lambda_1^k c_1 \underline{u}_1$$

per cui $\underline{e}^{(k)} \rightarrow \underline{0} \iff |\lambda_1| < 1$.

La relazione

$$\underline{e}^{(n)} \approx \lambda_1^n c_1 \underline{u}_1$$

permette di ottenere una stima di $g(E) = |\lambda_1|$: infatti

$$\underline{e}^{(n+1)} \approx \lambda_1^{n+1} c_1 \underline{u}_1 \Rightarrow \|\underline{e}^{(n+1)}\| \approx |\lambda_1|^{n+1} \cdot \|c_1 \underline{u}_1\|$$

$$\underline{e}^{(n)} \approx \lambda_1^n c_1 \underline{u}_1 \Rightarrow \|\underline{e}^{(n)}\| \approx |\lambda_1|^n \cdot \|c_1 \underline{u}_1\|$$

per cui

$$\frac{\|\underline{e}^{(n+1)}\|}{\|\underline{e}^{(n)}\|} \approx |\lambda_1| = g(E)$$

Questa relazione dice che il metodo iterativo ha ordine

Questa relazione dice che il metodo iterativo ha ordine di convergenza (1):

NOTA $\underline{u}_1$ è autovettore di E : $E \underline{u}_1 = \lambda_1 \underline{u}_1$

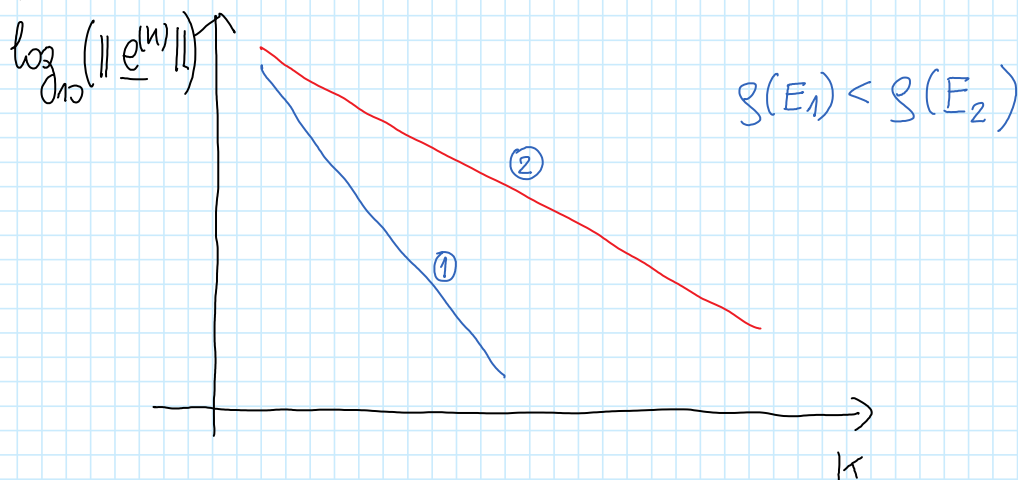
Consideriamo ora E^k :

$$\begin{aligned} E^k \underline{u}_1 &= E^{k-1}(E \underline{u}_1) = E^{k-1}(\lambda_1 \underline{u}_1) = \lambda_1 E^{k-1} \underline{u}_1 = \\ &= \lambda_1 E^{k-2}(E \underline{u}_1) = \lambda_1 E^{k-2}(\lambda_1 \underline{u}_1) = \\ &= \lambda_1^2 E^{k-2} \underline{u}_1 = \dots = \\ &= \lambda_1^k E^0 \underline{u}_1 = \lambda_1^k I_m \underline{u}_1 = \\ &= \lambda_1^k \underline{u}_1 \end{aligned}$$

La formula

$$\frac{\|e^{(n+1)}\|}{\|e^{(n)}\|} \approx \rho(E)$$

ci dice che più piccolo è $\rho(E)$ e più rapidamente scende l'errore. In scale logaritmiche, riportando $\log_{10}(\|e^{(n)}\|)$ in funzione di k si trova (almeno per k grandi)



Infatti è

$$\begin{aligned} \|e^{(n+1)}\| &\approx \rho(E) \cdot \|e^{(n)}\| \\ \|e^{(n)}\| &\approx \rho(E) \|e^{(n-1)}\| = [\rho(E)]^2 \cdot \|e^{(n-2)}\| = \dots \end{aligned}$$

$$= [g(E)]^k \| \underline{e}^{(0)} \|$$

da cui, prendendo ai logaritmi:

$$\boxed{\log_{10}(\| \underline{e}^{(n)} \|)} = \boxed{k} \left(\log_{10}(g(E)) \right) + \log_{10}(\| \underline{e}^{(0)} \|)$$

↳ pendenze rette (numero negativo, se il metodo converge perché $g(E) < 1$).

OSSERVAZIONE Nota $g(E)$ possiamo stimare il numero di iterazioni necessarie per avere l'errore $\| \underline{e}^{(n)} \|$ minore di $(\text{toll} \cdot \| \underline{e}^{(0)} \|)$:

$$\frac{\| \underline{e}^{(n)} \|}{\| \underline{e}^{(0)} \|} < \text{toll} \quad \text{con toll dato.}$$

Basta imporre che sia

$$\boxed{[g(E)]^k < \text{toll}} \Rightarrow \text{indichiamo n. di iterazioni } k.$$

perché allora risulta anche

$$\left(\frac{\| \underline{e}^{(n)} \|}{\| \underline{e}^{(0)} \|} < [g(E)]^n < \text{toll} \right)$$

METODI CLASSICI

Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} & & U \\ L & D & \\ & & \end{pmatrix} = L + D + U$$

Vediamo solo due metodi.

①) JACOBI

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

$$(L + D + U) \underline{x} = \underline{b}$$

$$D \underline{x} = -(L + U) \underline{x} + \underline{b}$$

Supponendo D invertibile

$$\underline{x} = \boxed{-D^{-1}(L+U)} \underline{x} + \boxed{D^{-1}\underline{b}}$$

$:= E_J$ (matrice di iterazione del metodo di Jacobi) $:= q_J$

Il metodo di Jacobi è iterativo

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{x}^{(h+1)} = -D^{-1}(L+U) \underline{x}^{(h)} + D^{-1}\underline{b} \\ \underline{x}^{(0)} \text{ assegnato} \end{array}}$$

②) GAUSS-SEIDEL

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

$$(L + D + U) \underline{x} = \underline{b}$$

$$(L + D) \underline{x} + U \underline{x} = \underline{b}$$

$$(L + D) \underline{x} = -U \underline{x} + \underline{b}$$

Supponendo $(L+D)$ invertibile abbiamo

$$\underline{x} = \boxed{-(L+D)^{-1}U} \underline{x} + \boxed{(L+D)^{-1}\underline{b}}$$

$:= E_S$
matrice di iterazione
di Gauss-Seidel

$:= q_S$

Il metodo è

$$\begin{cases} \underline{x}^{(n+1)} = E_S \underline{x}^{(n)} + \underline{q}_S \\ \underline{x}^{(0)} \text{ arbitrario} \end{cases}$$

Vediamo come scrivere il metodo di Jacobi componente e componente nel caso $n=3$.

$$\begin{aligned} E_J &= -D^{-1}(\underline{L} + \underline{U}) = - \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & 0 & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} 1/q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & 0 & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -q_{12}/q_{11} & -q_{13}/q_{11} \\ -q_{21}/q_{22} & 0 & -q_{23}/q_{22} \\ -q_{31}/q_{33} & -q_{32}/q_{33} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{q}_J = D^{-1} \underline{b} = \begin{pmatrix} 1/q_{11} & & \\ & 1/q_{22} & \\ & & 1/q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/q_{11} \\ b_2/q_{22} \\ b_3/q_{33} \end{pmatrix}$$

Quindi, posto $\underline{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \end{pmatrix}$ possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \\ x_3^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -q_{12}/q_{11} & -q_{13}/q_{11} \\ -q_{21}/q_{22} & 0 & -q_{23}/q_{22} \\ -q_{31}/q_{33} & -q_{32}/q_{33} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1/q_{11} \\ b_2/q_{22} \\ b_3/q_{33} \end{pmatrix}$$

da cui

$$x_i^{(n+1)} = - \sum_{j=1}^3 a_{ji} x_j^{(n)} + b_i / q_{ii}$$

o2 m

$$X_1^{(n+1)} = \frac{b_1 - Q_{12} X_2^{(n)} - Q_{13} X_3^{(n)}}{Q_{11}} = \frac{b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 a_{1j} X_j^{(n)}}{Q_{11}}$$

$$X_2^{(n+1)} = \frac{b_2 - Q_{21} X_1^{(n)} - Q_{23} X_3^{(n)}}{Q_{22}} = \left(b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 Q_{2j} X_j^{(n)} \right) / Q_{22}$$

$$X_3^{(n+1)} = \left(b_3 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^3 a_{3j} X_j^{(n)} \right) / Q_{33}$$

Per il caso generale

$$X_i^{(n+1)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_{ij} X_j^{(n)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, m$$