Esercitazione in preparazione all'esame

Davide Boscaini

Queste sono le note da cui ho tratto le esercitazioni del giorno 31 Gennaio 2013. Come tali sono ben lungi dall'essere esenti da errori, invito quindi chi ne trovasse a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it.

Esercizio 1. Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione del dominio A.

(a) Definire il concetto si punto di accumulazione e, nel caso $x_0 \in A$, definire la continuità in x_0.

(b) Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{\log(x+3)}$$

usando la regola di de l'Hospital, dopo averne verificate le condizioni.

Soluzione. (a) Per definizione si dice che x_0 è un *punto di accumulazione* di un certo insieme A se ogni intorno di x_0 contiene almeno un elemento di A diverso da x_0. Questo concetto è strettamente legato a quello di limite di una successione, infatti possiamo caratterizzare i punti di accumulazione dicendo che x_0 è di accumulazione per A se e soltanto se esso è il limite di una successione a_n di elementi di A, tutti diversi da x_0.

La funzione f si dice continua in $x_0 \in A$ se e solo se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

(b) Per prima cosa notiamo che il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{\log(x+3)}$$

è una forma indeterminata del tipo $+\infty/+\infty$, pertanto possiamo applicare il teorema di de l'Hospital.

Posto $f(x) = \log(x^2+1)$ e $g(x) = \log(x+3)$, il limite assegnato si può riscrivere come

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{\log(x+3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e, grazie al teorema di de l'Hospital, possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ora

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \quad g'(x) = \frac{1}{x+3},$$

pertanto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x(x+3)}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+6x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(2+6/x)}{x^2(1+1/x^2)}=2.$$

Esercizio 2. Sia

$$f(x)=\frac{1-2\log x}{x^2}.$$

(a) Determinare il dominio e studiare il segno di f.

(b) Calcolare la derivata prima f' e seconda f'' e studiarne il segno.

(c) Sulla base dei risultati ottenuti nel punto (b), indicare dove f è crescente/decrescente e convessa/concava evidenziando eventuali punti di massimo e minimo locali e punti di flesso.

(d) Determinare eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui di f e disegnare il grafico di f.

Soluzione. (a) Per quanto riguarda il dominio della funzione, dobbiamo chiedere che il denominatore sia diverso da zero, cioè $x \neq 0$, e che il logaritmo esista, cioè $x > 0$, pertanto segue che

$$D=\mathrm{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}.$$

Per quanto riguarda il segno, ci chiediamo quando $f(x) > 0$. Il denominatore, è sempre positivo, quindi possiamo limitarci a studiare il numeratore,

$$1-2\log x>0,$$

che ha soluzione $x < \sqrt{e}$. Pertanto la funzione è positiva per $0 < x < \sqrt{e}$, negativa per $x > \sqrt{e}$.

Osserviamo ora che, le funzioni $g(x) = \log(x^2 + 1)$ e $h(x) = (x + 3)$ sono continue su tutto l'asse reale e che $h(x) \neq 0$ sul dominio D, pertanto anche $f(x) = g(x)/h(x)$ è una funzione continua sul dominio D. Si ha poi che f cambia segno, ad esempio, agli estremi dell'intervallo $[1, e]$, quindi, per il *teorema degli zeri*, esiste un punto all'interno di tale intervallo nel quale la funzione è nulla. Per lo studio del segno appena compiuto, il punto in questione non può che essere $x_0 = \sqrt{e}$. Pertanto $f(x) = 0$ in $x = x_0$.

(b) Osservando che $g'(x) = -2/x$ e $h'(x) = 2x$, la derivata prima della funzione assegnata è

$$f'(x)=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{(h(x))^2}=\frac{4(\log x-1)}{x^3}.$$

Per quanto riguardo lo studio del suo segno, osserviamo che, nel dominio D, il denominatore è sempre positivo, pertanto possiamo limitarci allo studio del numeratore. In particolare si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $\log x > 1$, cioè per $x > e$. Segue quindi che $f'(x) = 0$ per $x = e$, pertanto $x_1 = e$ è un punto stazionario.

Per quanto riguarda la derivata seconda si ha

$$f''(x)=\frac{16-12\log x}{x^4}.$$

Quindi $f''(x) > 0$ se $\log x > 4/3$, cioè se $x > e^{4/3}$. Indicata con x_2 il valore $e^{4/3}$, si ha che $f''(x) > 0$ per $0 < x < x_2$.

(c) Dal momento che $f'(x) > 0$ per $x > x_1 = e$, si ha che in questo intervallo la funzione è crescente, mentre sarà decrescente per $0 < x < x_1$. Dal momento che prima di x_1 la funzione decresce e poi cresce, il punto stazionario x_1 è un punto di minimo. Essendo l'unico, tale minimo è anche il minimo globale.

Inoltre $f''(x) > 0$ per $0 < x < x_2$, pertanto in questo intervallo la funzione è convessa, mentre per $x > x_2$ la funzione è concava. Segue che x_2 è un punto di flesso.

(d) Studiando i limiti della funzione riusciamo ad individuare eventuali asintoti. Per le regole della *gerarchia degli infiniti*, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - 2\log x}{x^2} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - 2\log x}{x^2} = 0.$$

Pertanto l'asse $x = 0$ è un asintoto verticale, l'asse $y = 0$ è un asintoto orizzontale e non vi sono presenti asintoti obliqui.

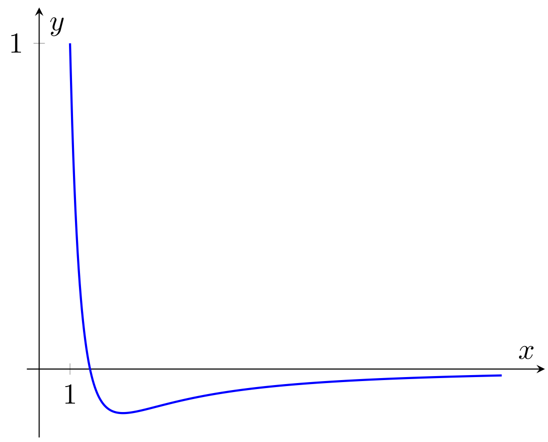

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = (1 - 2\log x)/x^2$ e della relativa retta tangente nel punto $(1, 1)$.

Unendo tutte le informazioni fin qui trovate possiamo tracciare il grafico della funzione, riportato in Figura 1.

Esercizio 3. Sia $f(x) = 3(x - 1)\cos(2x - 2) + 2x^2 - 3x + 2$ e sia $x_0 = 1$.

(a) Determinare il dominio f, calcolare i polinomi di Taylor $P_1(x)$ di ordine $n = 1$ e $P_2(x)$ di ordine $n = 2$.

(b) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ e disegnarla nel piano cartesiano.

(c) Scrivere la formula di Taylor di ordine $n = 2$ con resto di Lagrange (esprimere il resto in forma di Lagrange).

Soluzione. (a) La funzione f è definita su tutto l'asse reale. Lo sviluppo di Taylor di f centrato in $x_0 = 1$ di ordine 2 è

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Nel nostro caso

$$f'(x) = 3\cos(2x-2) - 6(x-1)\sin(2x-2) + 4x - 3,$$
$$f''(x) = -12\sin(2x-2) - 12(x-1)\cos(2x-2) + 4,$$

pertanto

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1, \\ f'(x_0) &= 3\cos 0 + 4 - 3 = 4, \\ f''(x_0) &= -12\sin 0 + 4 = 4. \end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo di Taylor di ordine 1 è

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \\ &= 1 + 4(x-1) + o(x) \\ &= -3 + 4x + o(x), \end{aligned}$$

da cui segue che $P_1(x) = -3 + 4x$. Mentre lo sviluppo di Taylor di ordine 2 è

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \\ &= 1 + 4(x-1) + 2(x-1)^2 + o(x^2) \\ &= -1 + 2x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

segue allora che $P_2(x) = -1 + 2x^2$.

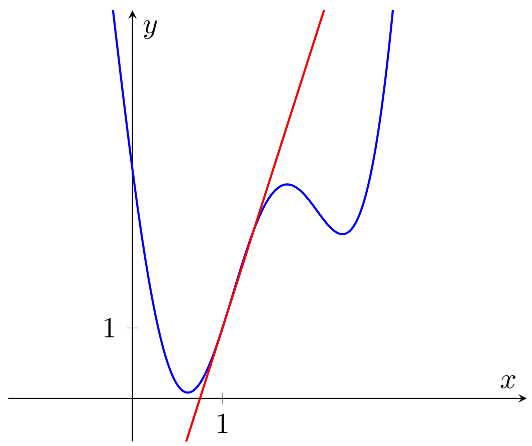

Figura 2: Grafico della funzione $f(x) = 3(x+1)\cos(2x-2) + 2x^2 - 3x + 2$.

(b) Dalla teoria sugli sviluppi di Taylor sappiamo che l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ coincide con il polinomio di Taylor di prim'ordine relativo allo sviluppo di Taylor del prim'ordine centrato in x_0, pertanto la retta tangente è

$$y = P_1(x) = -3 + 4x.$$

(c) Dal punto (a) sappiamo che il polinomio di Taylor del second'ordine è $P_2(x) = -1 + 2x^2$, quindi la formula di Taylor al second'ordine con resto in forma di Lagrange è

$$\begin{aligned} f(x) &= P_2(x) + \frac{f'''(c)}{3!}(x-x_0)^3 \\ &= -1 + 2x^2 + \frac{f'''(c)}{6}(x-1)^3, \end{aligned}$$

con $0 < c < 1$.

Esercizio 4. Sia
$$f(x) = \frac{\cos x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}.$$

(a) Determinare il dominio e studiare il segno di f in $[-\pi/2, \pi/2]$, trovare l'area con segno A sottesa al grafico di f tra i punti $a = 0$ e $b = \pi/2$.

(b) Enunciare il teorema di Lagrange ed illustrarlo graficamente. Applicare il teorema alla funzione $f(x) = 1/x$ in $[1, 4]$ e determinare esplicitamente il punto intermedio menzionato dal teorema.

Soluzione. (a) È facile vedere che il dominio di $f(x)$ è l'intero asse reale. Per quanto riguarda il segno, notiamo che il denominatore sarà sempre positivo, pertanto ci possiamo limitare a studiare il numeratore, e cioè $\cos x \sin x > 0$, che ha soluzione $0 < x < \pi/2$. Pertanto in $[-\pi/2, \pi/2]$ la funzione è positiva per $0 < x < \pi/2$.

Per quanto riguarda l'area A sottesa al grafico di f tra i punti $a = 0$ e $b = \pi/2$, si ha che
$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx.$$
Per risolvere questo integrale ricorriamo alla sostituzione $t = \cos^2 x$, quindi $dt = -2\cos x \sin x dx$. In questo modo otteniamo
$$\int \frac{\cos x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt,$$
che ha come primitiva
$$-\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt = -\frac{1}{2} \int (1+t)^{-1/2} dt = -\sqrt{1+t} + c.$$
Ricordandosi della situazione effettuata si trova che
$$A(x) = -\sqrt{1+\cos^2 x} + c,$$
pertanto
$$A = A(\pi/2) - A(0) = -\sqrt{1+\cos^2 \pi/2} + \sqrt{1+\cos^2 0} = \sqrt{2} - 1.$$

(b) Il *teorema di Lagrange* (o del valor medio) afferma che, se f è una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Consideriamo ora la funzione $f(x) = 1/x$ e l'intervallo $[1, 4]$. Le ipotesi del teorema di Lagrange sono tutte soddisfatte, infatti in tale intervallo la funzione f è derivabile, e quindi continua. Dal teorema sappiamo che esiste un punto $1 < c < 4$ tale che
$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{3} = -\frac{1}{4}.$$
Per determinare esplicitamente il valore di c, possiamo calcolare la derivata prima:
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$
e imponiamo l'uguaglianza
$$f'(c) = -\frac{1}{4}.$$
In questo modo si trova subito $c = 2$.