Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2012/2013
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 11
19 dicembre 2012

1. Dato un anello commutativo R, costruiamo il *campo delle frazioni* $Q(R)$ di R: sul prodotto cartesiano $R \times S$ con $S = R \setminus \{0\}$ consideriamo la relazione di equivalenza
$$(a, s) \sim (b, t) \quad \text{se} \quad at = sb.$$
Scriviamo $\frac{a}{s}$ per la classe di equivalenza di (a, s) rispetto a $\sim$ e poniamo
$$Q = Q(R) = \{\frac{a}{s} \mid a \in R, s \in S\}$$
   (a) Si dimostri che le seguenti operazioni su Q sono ben definite:
$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \quad \text{e} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$
   (b) Ci si "convinca" (verificando due assiomi a scelta, a titolo di esempio) che $(Q, +, \cdot)$ è un campo con $0 = \frac{0}{1}$ e $1 = \frac{1}{1}$.
   (c) Si dimostri che l'applicazione $\varphi : R \to Q$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ è un monomorfismo e che per ogni monomorfismo $\psi : R \to K$ in un campo K esiste uno e un solo monomorfismo $\tilde{\psi} : Q \to K$ tale che $\tilde{\psi}\,\varphi = \psi$.
   (d) Dato un campo K, si determini $Q(K[x])$.

(8 punti)

2. Per il campo delle funzioni razionali $\mathbb{C}(x)$ su $\mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, si consideri il sottocampo $\mathbb{C}(x^n)$ dato dalle frazioni $f(x^n)/g(x^n)$ con $f, g \in \mathbb{C}[x]$ e $g \neq 0$. Si verifichi che $[\mathbb{C}(x) : \mathbb{C}(x^n)] = n$.

(6 punti)

3. Sia $\alpha = \sqrt{2} + i \in \mathbb{C}$. Si dimostri che:
   (a) $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.
   (b) $\{1, \sqrt{2}, i, \sqrt{2}i\}$ è una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$.
   (c) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ è isomorfo al gruppo di Klein.
   (d) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ è un'estensione di Galois.

(8 punti)

4. Sia K un campo e sia $f \in K[x]$ un polinomio monico di grado $n > 0$ con campo di riducibilità completa F su K e zeri $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.
   (a) Per $n = 2$ si verifichi che $f = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2$.
   (b) Analogamente, si esprimano i coefficienti di f in funzione degli zeri $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ quando $n = 3$ e quando $n = 4$.
   (c) Come si esprimono i coefficienti di f in funzione degli zeri $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ per n arbitrario?

(*8 punti*)

Consegna: giovedì 10 gennaio durante le esercitazioni. Buone Feste!