Calcolo integrale in due e più variabili

9 dicembre 2010

1 Definizione di integrale

Il primo passo sta nella definizione e determinazione dell'integrale per funzioni a due variabili particolarmente semplici: le funzioni costanti su rettangoli.

Chiamiamo *rettangolo* il prodotto cartesiano di due intervalli $[a, b[\times[c, d[= R$.
Se consideriamo una partizione di $[a, b[$ in sottointervalli mediante i punti $x_0 = a, x_1, x_2, ...x_n = b$, ed una partizione di $[c, d[$ in sottointervalli mediante i punti $y_0 = c, y_1, y_2, ...y_m = d$, otteniamo una partizione del rettangolo iniziale $[a, b[\times[c, d[$ in $n \cdot m$ rettangoli più piccoli $R_{ik} = [x_{i-1}, x_i[\times[y_{k-1}, y_k[$.

Definizione 1 *Una funzione f che assuma su ogni rettangolo R_{ik} valore costante λ_{ik}, è una funzione costante su rettangoli in R.*

Conviene ampliare tale funzione su tutto R^2 ponendola uguale a 0 fuori del rettangolo R. In tal modo, può essere descritta in forma compatta usando le funzioni caratteristiche dei rettangoli R_{ik}: $\chi_{ik}(x, y) = 1$ se $(x, y) \in R_{ik}$, e 0 altrimenti.
Così risulta:

$$f(x, y) = \lambda_{11}\chi_{11}(x, y) + \lambda_{12}\chi_{12}(x, y)...\lambda_{nm}\chi_{nm}(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\lambda_{ik}\chi_{ik}(x, y).$$

Per le funzioni costanti su rettangoli si definisce facilmente il relativo integrale.

Definizione 2 *L'*integrale *della funzione f sopra definita è il numero*

$$\int f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\lambda_{ik}\mu(R_{ik}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\lambda_{ik}(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}). \quad (1)$$

Passiamo ora all'integrale di una generica funzione f.

Definizione 3 *Data una funzione f, è detto* supporto *della funzione la chiusura dell'insieme in cui f è diversa da 0:*

$$supp(f) = Cl(\vec{x} : f(\vec{x}) \neq 0)$$

dove si è indicato con Cl la chiusura dell'insieme.

Il supporto di una funzione è ovviamente un chiuso; se è anche limitato, allora è un *compatto*, in tal caso si dice che la funzione è nulla al di fuori di un compatto, o, più brevemente, che è a *supporto compatto.*

Sia data allora una funzione f definita nel compatto R e *limitata*. Considerata una qualsiasi partizione σ di R, calcoliamo gli estremi inferiori e superiori di f in ognuno dei rettangoli R_{ik} determinati da σ: siano

$$e_{ik} := inf\{f(x,y)|(x,y) \in R_{ik}\}$$

e

$$E_{ik} := sup\{f(x,y)|(x,y) \in R_{ik}\}.$$

Costruiamo ora le due funzioni costanti su rettangoli:

$$h(x,y) := \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} e_{ik}\chi_{ik}(x,y); \quad g(x,y) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} E_{ik}\chi_{ik}(x,y).$$

Si osserva subito che

- h è una *minorante* di f (ossia tale che per ogni $(x,y) \in R$ risulta $h(x,y) \leq f(x,y)$),

- g è una *maggiorante* di f (ossia tale che per ogni $(x, y) \in [a, b]$ risulta $g(x, y) \geq f(x, y)$)

- e infine che h è una minorante di g, e quindi che $\int h(x, y)dxdy \leq \int g(x, y)dxdy$.

Indichiamo con s_σ l'integrale di h, che è usualmente chiamato *somma inferiore* di f relativo a σ, e con S_σ l'integrale di g, detto *somma superiore*.
Notiamo esplicitamente che, per costruzione, questi due valori dipendono *esclusivamente* dalla funzione f e dalla partizione σ (si veda la fig. 1 a).

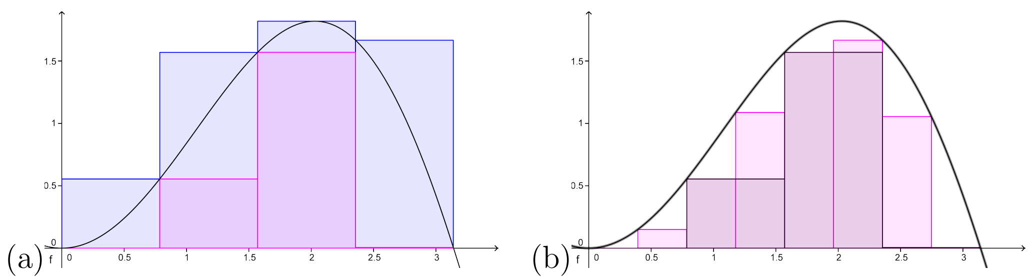

Figura 1: Somme inferiori e superiori

Ora, quando si passa da una partizione σ ad una partizione σ_1 *più fine*, è immediato osservare che (in fig. 1 b è rappresentato il caso delle somme inferiori):

$$s_\sigma \leq s_{\sigma_1} \leq S_{\sigma_1} \leq S_\sigma; \tag{2}$$

e che, in generale, ogni somma inferiore è minore o uguale ad ogni somma superiore.
Ne deriva che, indicati con Σ^- l'insieme delle somme inferiori e con Σ^+ l'insieme delle somme superiori,

$$sup\{\Sigma^-\} \leq inf\{\Sigma^+\}. \tag{3}$$

In altri termini, gli insiemi Σ^- e Σ^+ sono *separati*.
Si danno ora due casi: o nella disuguaglianza precedente vale il segno $=$, e allora Σ^- e Σ^+, oltre che separati, sono *contigui*, oppure no.

Ciò spiega la seguente

Definizione 4 *Sia f una funzione definita nel compatto R e limitata; f è* integrabile secondo Riemann *(o brevemente* integrabile*) su R se*

$$sup\{\Sigma^-\} = inf\{\Sigma^+\} = \alpha.$$

In tal caso, si pone

$$\int_R f(x,y)dxdy = \alpha. \tag{4}$$

Una definizione analoga, fatte le dovute modifiche, vale anche nel caso di n variabili.

Analogamente al caso dell'integrale in una variabile, abbiamo il seguente risultato, conseguenza immediata della definizione:

Teorema 1 *Condizione necessaria e sufficiente perché una funzione f limitata e a supporto compatto sia integrabile è che per ogni $\epsilon > 0$ esistano funzioni h e g costanti su rettangoli, h minorante di f e g maggiorante, tali che*

$$\int g(x,y)dxdy - \int h(x,y)dxdy < \epsilon.$$

2 Misura di un insieme

La definizione data consente di parlare di *misura* di un insieme I.

Definizione 5 *Un insieme limitato $I \subset R^2$ è* misurabile *(secondo Peano-Jordan) se la sua funzione caratteristica χ_I è integrabile. In tal caso la* misura *di I è*

$$\mu(I) = \int \chi_I(x,y)dxdy.$$

In base alla definizione di funzione integrabile, ciò significa che esistono funzioni h e g costanti su rettangoli, con $h \leq \chi_I \leq g$ tali che

$$\int g(x,y)dxdy - \int h(x,y)dxdy < \epsilon,$$

entrambe determinate da una partizione σ del sostegno compatto.
Se chiamiamo *interni* i rettangoli $R_{i;k}$ della partizione formati da soli punti

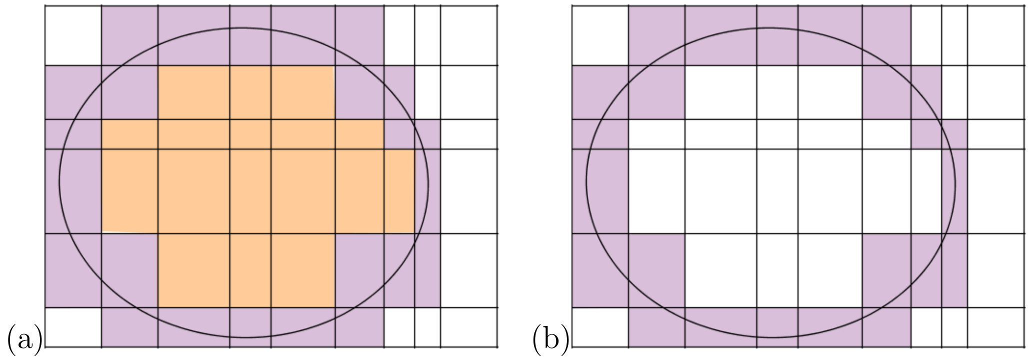

Figura 2: Rettangoli interni e di frontiera

interni all'insieme I, *esterni* quelli formati da soli punti esterni e *di frontiera* quelli che contengono almeno un punto della frontiera di I, la migliore funzione minorante h varrà 1 sui rettangoli interni e 0 su tutti gli altri, e la migliore maggiorante g varrà 0 sui rettangoli esterni e 1 su tutti gli altri. Così, la funzione differenza $g - h$ varrà 1 sui soli rettangoli di frontiera, e 0 altrove.
Quindi, poiché

$$\int [g(x, y - h(x, y)]dxdy = \int g(x, y)dxdy - \int h(x, y)dxdy < \epsilon,$$

possiamo concludere che un insieme I è misurabile se la sua frontiera ∂I è ricopribile da un plurirettangolo di misura minore di ϵ (fig. 2, b).
E infine, data l'arbitrarietà di ϵ,

Teorema 2 *$I \subset R^2$ è* misurabile *secondo Peano-Jordan se e solo se la sua frontiera ∂I è di misura nulla.*

Esempi e controesempi

Un esempio di insieme non misurabile è l'insieme $\{(x, y) : x \in [0, 2], 0 \leq y \leq 1 + d(x)\}$, dove d è la funzione di Dirichlet.

Un esempio importante di insieme misurabile è il seguente.
Sia g una funzione integrabile su $[a, b]$ e che per il momento assumiamo *positiva*. Allora l'insieme $I = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], 0 \leq y \leq g(x)\}$ è

misurabile e risulta

$$\mu(I) = \int_a^b g(x)dx.$$

Il risultato è dovuto al fatto che, il questo caso, i plurirettangoli inscritti e circoscritti associati alla misura di I sono gli stessi plurirettangoli inscritti e circoscritti che definiscono l'integrale secondo Riemann della funzione g.

Il risultato precedente può essere generalizzato. Se h e g sono entrambe integrabili in $[a, b]$, l'insieme $I = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], h(x) \leq y \leq g(x)\}$ è misurabile in quanto differenza di due insiemi misurabili, e risulta

$$\mu(I) = \int_a^b [g(x) - h(x)]dx.$$

Un esempio di questo caso si ha considerando un disco

$$I = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

il cui bordo può essere espresso mediante le due funzioni $h(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Infine, si può generalizzare ulteriormente il risultato, togliendo l'ipotesi di positività. Se infatti g e h non fossero positive, possiamo sempre considerare le funzioni traslate $g + k$ e $h + k$, con k costante scelta in modo che le nuove funzioni risultino positive. Sia I_k l'insieme individuato dalle nuove funzioni. Ovviamente, $\mu(I) = \mu(I_k)$, e risulta uguale a

$$\int_a^b [g(x) + k - h(x) - k]dx = \int_a^b [g(x) - h(x)]dx.$$

Insiemi del tipo descritto sono detti *normali rispetto all'asse delle* y, o y-semplici (in Adams).
Analogamente si possono definire gli insiemi *normali rispetto all'asse delle* x (o x-semplici).