2 Algebra lineare

2.1 Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$

Dato un numero $n \in \mathbb{N}$, il simbolo $\mathbb{R}^n$ sta ad indicare il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ di n copie di $\mathbb{R}$; in altre parole, si tratta delle *n-uple* ("coppie" per $n = 2$, "terne" per $n = 3$) *ordinate di numeri reali*:

$$\mathbb{R}^n = \{\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R} \text{ per ogni } i = 1, \dots, n\}.$$

Se $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, il numero $a_i \in \mathbb{R}$ si dirà la *componente i-esima* della n-upla $\vec{a}$. Si intende dunque che *due n-uple sono uguali se e solo se esse hanno tutte le componenti corrispondenti a due a due uguali*: se $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$, si ha

$$\vec{a} = \vec{b} \qquad \text{se e solo se} \qquad a_i = b_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Di particolare importanza sono la *n-upla nulla* $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ (con tutte le componenti nulle) e, per ogni $1 \le i \le n$, la *i-esima n-upla canonica* $\vec{e}_i$ che ha tutte le componenti nulle tranne la i-esima, uguale a 1.[22]

Somma e moltiplicazione per scalari Mettiamo in evidenza le seguenti due proprietà (Vect1-2) di $\mathbb{R}^n$, che danno a quest'ultimo la struttura di *spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$.

(Vect1) È definita una *somma* di n-uple

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n);$$

chiaramente $(\mathbb{R}^n, +)$ è un gruppo commutativo, con $\vec{0}$ come elemento neutro, e opposto di $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ la n-upla $-\vec{a} = (-a_1, \dots, -a_n)$.

(Vect2) È definita anche una *moltiplicazione di n-uple per numeri reali*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \lambda(a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$$

che soddisfa le proprietà $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$, $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$, $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ e $1\vec{a} = \vec{a}$ per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Con riferimento a questa moltiplicazione, gli elementi di $\mathbb{R}$ si diranno *scalari*.

Modulo Il *modulo* di una n-upla $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ è il numero reale ≥ 0 dato da

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}. \tag{2.1}$$

Notiamo subito che:

[22] Ad esempio, per $\mathbb{R}^4$ si ha $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $\vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$).

Proposizione 2.1.1. (Proprietà del modulo) *Si ha:*

(1) $|\vec{0}| = 0$, *e* $|\vec{a}| > 0$ per ogni $\vec{a} \neq \vec{0}$;

(2) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$*;*

(3) (Disuguaglianza triangolare) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ per ogni $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. (1) e (2) sono ovvi; vediamo ora (3). Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (vedi Lemma 2.1.2) si ha $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^2 = (\sum_{j=1}^n a_j^2) + (\sum_{j=1}^n b_j^2) + 2\sum_{j=1}^n a_j b_j = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\sum_{j=1}^n a_j b_j \leq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\sum_{j=1}^n |\vec{a}||\vec{b}| = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$, da cui $|\vec{a} + \vec{b}|^2 \leq (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$, che equivale a $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. □

Vettori geometrici nel piano e nello spazio I casi $n = 2$ e $n = 3$ sono particolarmente significativi perché permettono di visualizzare concretamente $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ come *vettori geometrici*. Vediamo come.

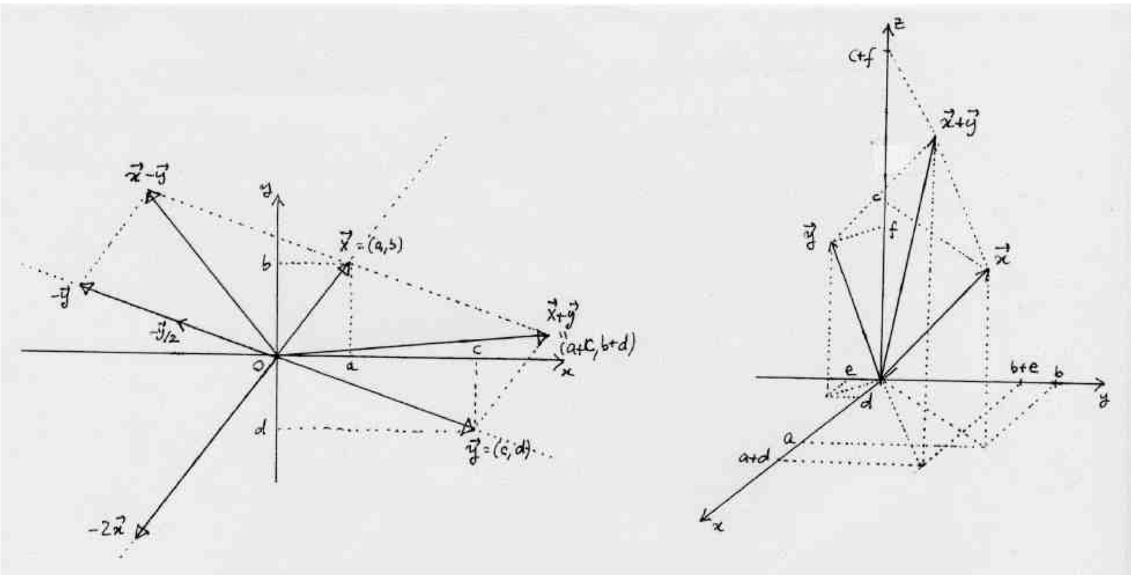

Figura 2.1: *Vettori geometrici nel piano e nello spazio tridimensionale.*

• Una scelta di *coordinate cartesiane piane ortogonali monometriche* nel piano Π consiste nel fissare un punto "origine" O, due rette ortogonali orientate passanti per O (dette "assi coordinati") ed una lunghezza unitaria: questi elementi determinano un sistema di coordinate ascisse su entrambi gli assi coordinati scegliendo come punto unità un punto a distanza unitaria da O nel verso scelto. Si ottiene allora una biiezione $\Pi \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ nel modo ben noto: preso un punto P nel piano Π, lo si proietta sugli assi coordinati associandogli univocamente una coppia di numeri reali $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che, viceversa, individua univocamente P. Un procedimento analogo permette di definire un sistema di *coordinate cartesiane spaziali ortogonali monometriche* nello spazio tridimensionale, che viene identificato in questo modo ad $\mathbb{R}^3$.

• Un punto P del piano Π è identificabile col *vettore geometrico* $\overrightarrow{OP}$, ovvero il segmento orientato che va da O a P, grandezza caratterizzata come noto da un *modulo* (la lunghezza del segmento) e, se $P \neq O$, anche da una *direzione* (la retta passante per O e P) ed un *verso* (quello che va da O a P: si mette spesso una freccia sulla "punta" P del vettore). Nell'identificazione tra il piano Π dei "vettori geometrici piani" $\overrightarrow{OP}$ ed $\mathbb{R}^2$ data da un sistema di coordinate cartesiane, la somma di coppie in $\mathbb{R}^2$ corrisponde alla somma dei corrispondenti vettori geometrici data dalla *regola del parallelogramma*, e la moltiplicazione di una coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ corrisponde al vettore geometrico ottenuto da $\overrightarrow{OP}$ mantenendone inalterata la direzione, moltiplicandone il modulo per $|\lambda|$ e preservandone o invertendone il verso a seconda che $\lambda \gtreqless 0$. Lo stesso ragionamento permette di visualizzare $\mathbb{R}^3$ con le sue somma e moltiplicazione per scalari con lo spazio dei "vettori geometrici spaziali" e la loro somma e moltiplicazione per costanti, descritte dagli stessi procedimenti. Sia nel piano che nello spazio tridimensionale, il modulo definito dalla formula (2.1) rappresenta niente altro che la *lunghezza* del vettore geometrico (ovvia conseguenza del Teorema di Pitagora), e la Disuguaglianza Triangolare descritta nella Proposizione 2.1.1 esprime il ben noto fatto che in un qualsiasi triangolo (nel caso presente, uno dei due triangoli in cui il parallelogramma formato da due vettori geometrici è diviso dalla loro somma vettoriale) la somma della lunghezza di due lati è sempre maggiore o uguale del terzo lato.
Questa identificazione è utile per la concretizzazione geometrica di ciò che stiamo discutendo solo a livello algebrico, e fa intuire un'identificazione analoga nel caso generale tra le n-uple di $\mathbb{R}^n$ e i vettori geometrici di una spazio ad n dimensioni: l'unica differenza è, naturalmente, che se $n \geq 4$ non si possono tracciare disegni di tale spazio e dei suoi vettori.

Questa caratterizzazione geometrica delle n-uple di numeri reali come vettori di uno spazio ad n dimensioni (caratterizzazione che consigliamo di tenere sempre nella mente, specialmente nei casi $n = 2$ e $n = 3$) ci porta a chiamare spesso *vettori di* $\mathbb{R}^n$ le n-uple di numeri reali: è proprio pensando a questo che, ad esempio, dato un vettore $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, diremo che un suo multiplo scalare $\lambda\vec{a}$ (con $\lambda \in \mathbb{R}$) è un *vettore parallelo ad* $\vec{a}$.

Prodotto scalare Il *prodotto scalare canonico* "euclideo" in $\mathbb{R}^n$ è la funzione $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che associa ad una coppia di vettori $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ il numero reale $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dato da

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Tale prodotto soddisfa le seguenti proprietà:
• (commutatività) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
• (commutazione con la moltiplicazione per scalari) $\vec{\lambda a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{\lambda b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

- (distributività per la somma) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;
- (positività) $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$ se $\vec{a}\neq\vec{0}$.

Vale la seguente notevole

Lemma 2.1.2. (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) *Per ogni* $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ *vale*

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leq(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}).$$

Dimostrazione. Per la positività, per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$ si deve avere $(\lambda\vec{a}+\vec{b})\cdot(\lambda\vec{a}+\vec{b})\geq 0$, ovvero (sviluppando il primo membro ed usando le altre proprietà del prodotto scalare) $(\vec{a}\cdot\vec{a})\lambda^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})\lambda+(\vec{b}\cdot\vec{b})\geq 0$: poiché ciò deve valere per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$, bisogna che il discriminante di questo trinomio di secondo grado in λ sia ≤ 0, ma ciò è esattamente la tesi. $\square$

Si noti che vale, in particolare,

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=|\vec{a}|^2 \qquad \text{per ogni } \vec{a}\in\mathbb{R}^n:$$

dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si deduce allora subito che

Corollario 2.1.3. *Per ogni* $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ *vale*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\leq|\vec{a}||\vec{b}|.$$

In effetti, nel caso $n=3$ (ed in particolare nel caso $n=2$) l'interpretazione geometrica del prodotto scalare è la seguente:

Proposizione 2.1.4. (Interpretazione geometrica del prodotto scalare) *Se* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *sono due vettori geometrici e si denota con* $\theta\in[0,\pi]$ *l'angolo convesso*[23] *tra essi, si ha*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

Dimostrazione. (Si consiglia di disegnare i vettori geometrici sul piano per capire meglio.) Usando le proprietà del prodotto scalare, si ha $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a}\cdot\vec{a})+(\vec{b}\cdot\vec{b})-2(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$; d'altra parte, usando il Teorema del Coseno[24] si ricava subito $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, e la tesi segue subito confrontando queste due uguaglianze. $\square$

Così, due vettori geometrici $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli se e solo se $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$ (in particolare, si ha $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ che, come detto, è >0 se $\vec{a}\neq\vec{0}$), e sono ortogonali (ove per "ortogonalità" si intende l'usuale nozione di perpendicolarità) se e solo se $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; nei casi intermedi, essi formano un angolo acuto (risp. ottuso) se e solo se $\cos\theta>0$ (risp. $\cos\theta>0$). Un'altra formula interessante è la seguente:

[23] ovvero, minore o uguale dell'angolo piatto.

[24] Il Teorema del Coseno, dovuto a Carnot, dice che in un triangolo di lati a,b,c, denotato con θ l'angolo compreso tra i lati di lunghezza e a e b, vale $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$ (ovviamente si tratta di una generalizzazione del Teorema di Pitagora: se i lati di lunghezza e a e b sono perpendicolari, si ha $\cos\theta=0$ e dunque $c^2=a^2+b^2$).

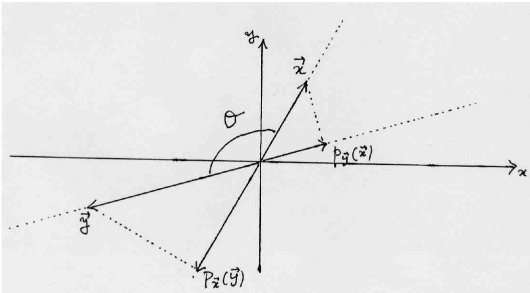

Figura 2.2: *Proiezioni ortogonali nel piano.*

Proposizione 2.1.5. (Formula di proiezione per i vettori geometrici) *Se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, il vettore $\vec{u}$ si scrive in uno ed un solo modo come somma di due vettori*

$$\vec{u} = p_{\vec{v}}(\vec{u}) + o_{\vec{v}}(\vec{u}),$$

ove $p_{\vec{v}}(\vec{u})$ (detto *proiezione ortogonale di $\vec{u}$ lungo $\vec{v}$*) *è un vettore parallelo a $\vec{v}$ e $o_{\vec{v}}(\vec{u})$ è un vettore ortogonale a $\vec{v}$, e vale*

$$p_{\vec{v}}(\vec{u}) = \tfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}, \qquad\qquad o_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{u} - \tfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}.$$

Dimostrazione. (Si consiglia di disegnare i vettori geometrici sul piano per capire meglio.) Il vettore $p_{\vec{v}}(\vec{u})$ dev'essere parallelo a $\vec{v}$, dunque del tipo $\lambda\vec{v}$, e deve avere modulo $|\vec{u}||\cos\theta|$: pertanto $|\lambda\vec{v}| = |\lambda||\vec{v}| = |\vec{u}||\cos\theta|$, da cui $|\lambda| = \frac{|\vec{u}||\cos\theta|}{|\vec{v}|} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|^2} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\vec{v}\cdot\vec{v}}$. Se poi $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (risp. $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$) dovrà essere $\lambda \geq 0$ (risp. $\lambda \leq 0$), e perciò si ottiene $\lambda = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}$, ovvero $p_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}$. Si avrà allora necessariamente $o_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}$, e dunque ci resta da mostrare solo che tale $o_{\vec{v}}(\vec{u})$ è un vettore ortogonale a $\vec{v}$: ciò è vero perché $o_{\vec{v}}(\vec{u}) \cdot \vec{v} = (\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}) \cdot \vec{v} = (\vec{u}\cdot\vec{v}) - (\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}) \cdot \vec{v} = (\vec{u}\cdot\vec{v}) - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 0$. □

Esempi. **(1)** In $\mathbb{R}^2$, se $\vec{a} = (1, -3)$ e $\vec{b} = (-5, -2)$ si ha $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1(-5) + (-3)(-2) = 1$. Vale inoltre $p_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\,\vec{b} = \frac{1}{29}\vec{b} = (-\frac{5}{29}, -\frac{2}{29})$, e $o_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{a} - p_{\vec{b}}(\vec{a}) = (\frac{34}{29}, -\frac{85}{29})$; d'altra parte, invece, vale $p_{\vec{a}}(\vec{b}) = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,\vec{a} = \frac{1}{10}\vec{a} = (\frac{1}{10}, -\frac{3}{10})$ e $o_{\vec{a}}(\vec{b}) = \vec{b} - p_{\vec{a}}(\vec{b}) = (-\frac{51}{10}, -\frac{17}{210})$. **(2)** In $\mathbb{R}^3$, i vettori geometrici $\vec{a} = (1, -1, 2)$ e $\vec{b} = (-4, 0, 2)$ sono ortogonali: infatti $\vec{a}\cdot\vec{b} = (1)(-4) + (-1)(0) + (2)(2) = 0$. La proiezione di $\vec{b}$ lungo la retta di $\vec{a}$ è dunque $p_{\vec{a}}(\vec{b}) = \vec{0}$ (da cui $o_{\vec{a}}(\vec{b}) = \vec{b}$), mentre quella di $\vec{c} = (1, 2, -3)$ è $p_{\vec{a}}(\vec{c}) = \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a} = \frac{1-2-6}{1+1+4}(1, -1, 2) = -\frac{7}{6}(1, -1, 2) = (-\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, -\frac{7}{12})$, da cui $o_{\vec{a}}(\vec{c}) = \vec{c} - p_{\vec{a}}(\vec{c}) = (\frac{13}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{29}{12})$.

2.2 Geometria affine ed euclidea nel piano e nello spazio

Parliamo della geometria affine nel piano e nello spazio cartesiani, ovvero delle rette nel piano e delle rette e piani nello spazio tridimensionale. Parlando di "punto" del piano o dello spazio intenderemo l'estremo del relativo vettore: così, ad esempio, il punto $P_{\vec{a}} = (-1, 0, 2)$ sarà visto come l'estremo del vettore $\vec{a} = (-1, 0, 2)$.

Geometria affine ed euclidea nel piano Pensiamo il piano munito di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche.

• **Rette nel piano: forma parametrica.** Dato un vettore $\vec{a} = (a_1, a_2) \neq \vec{0}$ ed un punto $P_{\vec{b}} = (b_1, b_2)$, la forma parametrica della retta r passante per $P_{\vec{b}}$ e parallela ad $\vec{a}$ è

$$r = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a} = \{\vec{b} + \alpha\vec{a} : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(b_1 + \alpha a_1, b_2 + \alpha a_2) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Poiché un vettore ortogonale a $\vec{a}$ è il vettore $\vec{a}' = (a_2, -a_1)$ (si noti infatti che $\vec{a} \cdot \vec{a}' = 0$), la forma parametrica della retta $r^\perp$ passante per $P_{\vec{b}}$ e ortogonale ad $\vec{a}$ è

$$r^\perp = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}' = \{\vec{b} + \alpha\vec{a}' : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(b_1 + \alpha a_2, b_2 - \alpha a_1) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

La distanza di $Q_{\vec{c}}$ dalla retta $r = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}$ è il modulo del vettore $p_{\vec{a}'}(\vec{c} - \vec{b})$, ovvero $|\frac{(\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{a}'}{|\vec{a}'|^2}\vec{a}'| = \frac{|(\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{a}'|}{|\vec{a}'|^2}|\vec{a}'|$, da cui

$$\mathrm{dist}(Q_{\vec{c}}, r) = \frac{|(\vec{c} - \vec{b}) \cdot \vec{a}'|}{|\vec{a}'|}.$$

• **Rette nel piano: forma cartesiana.** Come noto, è un luogo geometrico dei punti (x, y) del piano della forma

$$ux + vy + w = 0 \qquad \text{con } (u, v) \neq (0, 0).$$

La retta parallela ad essa passante per l'origine $(0, 0)$ è $ux + vy = 0$, e si noti che il vettore (u, v) è ortogonale a tutti i suoi vettori.

• **Rette nel piano: dalla forma cartesiana alla forma parametrica.** Se una retta r del piano è data nella sua forma cartesiana $ux + vy + w = 0$:

(1) si prenda un qualsiasi punto $P_{\vec{b}}$ di r, ad esempio $\vec{b} = (0, -\frac{w}{v})$ (se $v \neq 0$) oppure $\vec{b} = (-\frac{w}{u}, 0)$ (se $u \neq 0$);

(2) considerata la retta parallela ad r passante per $(0, 0)$ (ovvero $ux+vy = 0$), si prenda un qualsiasi vettore non nullo in essa contenuto, ad esempio $\vec{a} = (a_1, a_2) = (v, -u)$;

(3) si costruisce la forma parametrica $r = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}$.

• **Rette nel piano: dalla forma parametrica alla forma cartesiana.** Se una retta r del piano è data nella sua forma parametrica $\vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}$:

(1) nel sistema $\begin{cases} x = b_1 + \alpha a_1 \\ y = b_2 + \alpha a_2 \end{cases}$ si moltiplichino per a_2 (risp. per $-a_1$) i due membri della prima (risp. della seconda) equazione;

(2) sommando membro a membro le due equazioni, si ottiene la forma cartesiana $a_2x - a_1y = a_2b_1 - a_1b_2$, ovvero $a_2x - a_1y - (a_2b_1 - a_1b_2) = 0$.

Analogamente, in (1) basta ricavare α da una delle due equazioni e sostituire nell'altra per ottenere la forma cartesiana. La formula della distanza di un punto $Q_{\vec{c}}$ dalla retta r di equazione $ux + vy + w = 0$ diventa

$$\mathrm{dist}(Q_{\vec{c}}, r) = \frac{|uc_1 + vc_2 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

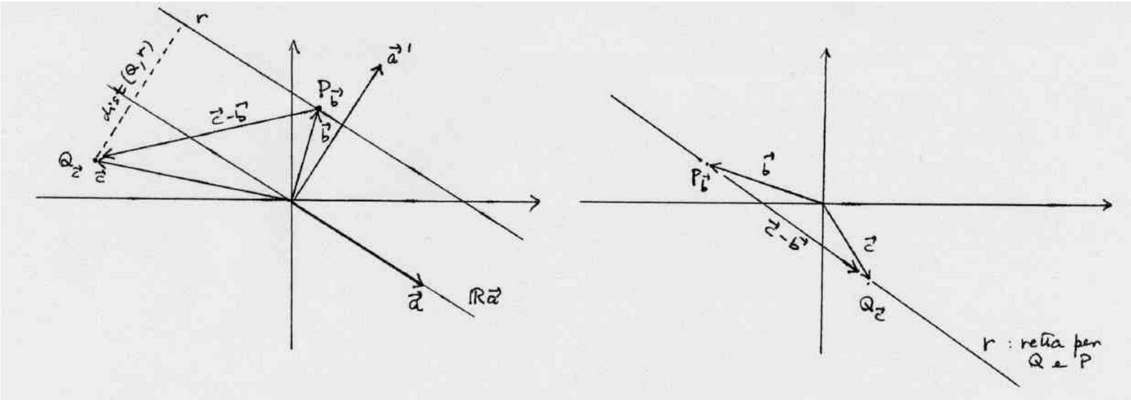

Figura 2.3: *Forma parametrica di una retta nel piano; retta per due punti.*

• **Retta per due punti.** Per due punti distinti $P_{\vec{b}} = (b_1, b_2)$ e $Q_{\vec{c}} = (c_1, c_2)$ passa una ed una sola retta r. Per la sua forma parametrica, la retta r sarà parallela al vettore $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2)$ e dovrà passare per $P_{\vec{b}}$: si ottiene dunque

$$r = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a} = \{\vec{b} + \alpha(\vec{c} - \vec{b}) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{((1-\alpha)b_1 + \alpha c_1, (1-\alpha)b_2 + \alpha c_2) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

(Chiedendo ad r di passare per $Q_{\vec{c}}$ in luogo di $P_{\vec{b}}$ si ottiene invece $\{((1+\beta)c_1 - \beta b_1, (1+\beta)c_2 - \beta b_2) : \beta \in \mathbb{R}\}$, che naturalmente dà lo stesso insieme di punti del piano: basta scambiare il parametro β con $\alpha - 1$.) Passando alla forma cartesiana, si ottiene come noto

$$\det\begin{pmatrix} x - b_1 & y - b_2 \\ c_1 - b_1 & c_2 - b_2 \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{ovvero } (c_2 - b_2)x - (c_1 - b_1)y + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0.$$

Esempi. (1) Dati $\vec{a} = (3, -1)$ e $b = (2, 4)$, la retta parallela ad $\vec{a}$ e passante per $P_{\vec{b}}$ ha equazione parametrica $\{\vec{b} + \alpha\vec{a} : \alpha \in \mathbb{R}\} = (2 + 3\alpha, 4 - \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$; dalla seconda equazione del sistema $\begin{cases} x = 2 + 3\alpha \\ y = 4 - \alpha \end{cases}$ si ricava $\alpha = 4 - y$, che sostituita nella prima dà la forma cartesiana $x = 2 + 3(4 - y)$, ovvero $x + 3y - 14 = 0$. **(2)** Consideriamo la retta $y = -\frac{2}{5}x + 3$, ovvero $2x + 5y - 15 = 0$ e determiniamone la forma parametrica. Un suo punto è ad esempio $P_{\vec{b}}$ con $\vec{b} = (0, 3)$; la parallela per l'origine ha equazione cartesiana $2x + 5y = 0$, da cui si deduce che un vettore parallelo è ad esempio $\vec{a} = (5, -2)$: dunque una forma parametrica è $\{\vec{b} + \alpha\vec{a} : \alpha \in \mathbb{R}\} = (5\alpha, 3 - 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. **(3)** La distanza del punto $Q_{\vec{c}} = (2, -1)$ dalla retta r di equazione $x - 3y + 1 = 0$ risulta $\mathrm{dist}(Q_{\vec{c}}, r) = \frac{|(1)(2) + (-3)(-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$. Ricalcoliamo la distanza dalla forma parametrica. Un vettore ortogonale ad r è $\vec{a}' = (1, -3)$, ed un punto di r è ad esempio $P_{\vec{b}} = (-1, 0)$: dunque

$\mathrm{dist}(Q_{\vec c}, r) = \frac{|(\vec b - \vec c)\cdot \vec a'|}{|\vec a'|} = \frac{|(-3,1)\cdot(1,-3)|}{|(1,-3)|} = \frac{6}{\sqrt{10}}$. **(4)** La retta per i due punti $P_{\vec b} = (-1,3)$ e $Q_{\vec c} = (2,1)$ ha equazione parametrica $\vec b + \mathbb{R}(\vec c - \vec b) = \{(-1,3) + \alpha(3,-2) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(-1+3\alpha, 3-2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$; l'equazione cartesiana si trova ricavando α da $x = -1 + 3\alpha$ (si ha $\alpha = \frac{x+1}{3}$) e sostituendo in $y = 3 - 2\alpha$, che dà $y = 3 - 2\frac{x+1}{3}$, ovvero $2x + 3y - 7 = 0$. (Quest'ultima equazione si può ricavare direttamente anche dalla formula $\det\begin{pmatrix} x-(-1) & y-3 \\ 2-(-1) & 1-3 \end{pmatrix} = 0$.)

Geometria affine ed euclidea nello spazio tridimensionale Studiamo ora le rette ed i piani dello spazio tridimensionale munito di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche.

• **Prodotto vettoriale.** Dati due vettori $\vec a = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec b = (b_1, b_2, b_3)$, il loro *prodotto vettoriale* $\vec a \wedge \vec b$ (talvolta denotato anche con $\vec a \times \vec b$) è il vettore di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$\vec a \wedge \vec b = (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1) \qquad \left(\text{formalmente } \vec a \wedge \vec b = \det\begin{pmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\right).$$

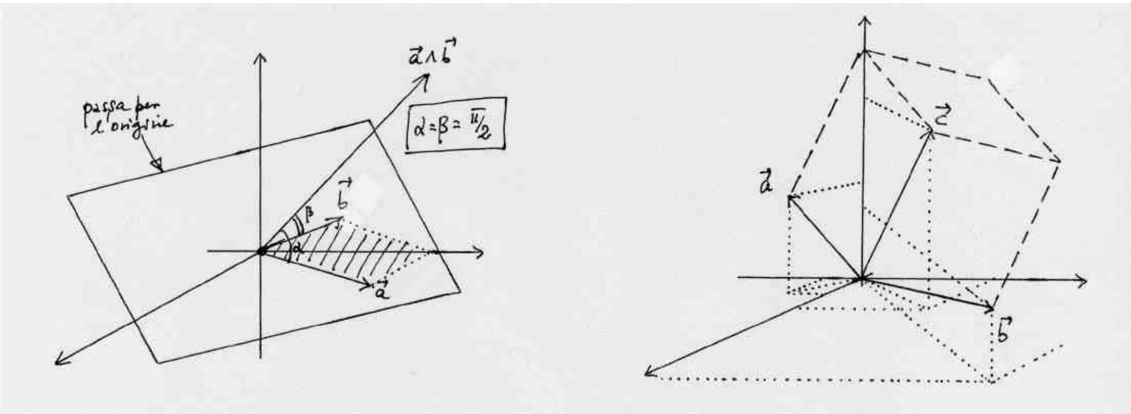

Figura 2.4: *Prodotto vettoriale e area del parallelogramma; prodotto misto e volume del parallelepipedo.*

Proposizione 2.2.1. (Proprietà del prodotto vettoriale)

(1) (Condizione di parallelismo di due vettori) *Vale $\vec a \wedge \vec b = \vec 0$ se e solo se i vettori $\vec a$ e $\vec b$ sono paralleli.*

(2) *Il prodotto vettoriale* è distributivo rispetto alla somma (ovvero $\vec a \wedge (\vec b_1 + \vec b_2) = \vec a \wedge \vec b_1 + \vec a \wedge \vec b_2$ e $(\vec a_1 + \vec a_2) \wedge \vec b = \vec a_1 \wedge \vec b + \vec a_2 \wedge \vec b$), commuta con la moltiplicazione per scalari (ovvero $\vec a \wedge (\lambda \vec b) = (\lambda \vec a) \wedge \vec b = \lambda(\vec a \wedge \vec b)$), anticommutativo (ovvero $\vec b \wedge \vec a = -\vec a \wedge \vec b$) *e* non associativo (ovvero in generale $(\vec a \wedge \vec b) \wedge \vec c \neq \vec a \wedge (\vec b \wedge \vec c)$).

(3) (Il vettore $\vec a \wedge \vec b$ e l'area di un parallelogramma) *Se i vettori $\vec a$ e $\vec b$ non sono paralleli, $\vec a \wedge \vec b$ è ortogonale sia ad $\vec a$ che a $\vec b$* (e dunque a tutto il piano che li contiene) *ed il suo*

verso è quello che fa di $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$ *una* terna destrogira[25]*; inoltre, detto* θ *l'angolo convesso compreso tra* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$*, il suo modulo vale*

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$$

che è numericamente uguale all'area del parallelogramma individuato da $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$*.*

(4) (Volume di un parallelepipedo e condizione di complanarità per tre vettori) *Dati tre qualsiasi vettori* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$*, il loro* prodotto misto $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} \in \mathbb{R}$ *è uguale a*

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

ed è, in valore assoluto, numericamente uguale al volume del parallelepipedo individuato da $\vec{a}$*,* $\vec{b}$ *e* $\vec{c}$*. In particolare, tre vettori* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ *sono* complanari *se e solo se* $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Dimostrazione. (1) I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli se e solo se le loro coordinate sono proporzionali, e ciò accade se e solo se $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$. (2) Si verifica direttamente che $\vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b}$ (nella formalità del determinante, si tratta dello scambio delle ultime due righe). Per la non associatività, ad esempio vale $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$ mentre $\vec{e}_1 \wedge (\vec{e}_2 \wedge \vec{2}) = \vec{e}_1 \wedge \vec{0} = \vec{0}$. (3) Si noti che $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{0}$, dunque $\vec{a} \wedge \vec{b}$ è ortogonale sia ad $\vec{a}$ che a $\vec{b}$. Da $\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ (vedi Proposizione 2.1.4) si ricava $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, e l'uguaglianza $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$ si può dimostrare direttamente. (4) è allora una diretta conseguenza di (2) (infatti, se ψ è l'angolo formato da $\vec{c}$ col piano contenente i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si ha $|(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}||\vec{c}| \cos(\frac{\pi}{2} - \psi) = |\vec{a} \wedge \vec{b}||\vec{c}| \sin\psi =$ (Area di base)×(Altezza). □

Esempi. (0) Vale $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2$ e $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3$. **(1)** Il prodotto vettoriale di $\vec{a} = (-2, 1, 1)$ e $\vec{b} = (1, 0, -4)$ è $\vec{a} \wedge \vec{b} = (-4, -7, -1)$ (da cui l'area del parallelogramma individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$ risulta $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \sqrt{66}$); il volume del parallepipedo individuato da $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c} = (0, -3, 2)$ è $|(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}| = 19$. **(2)** Se si vuole calcolare l'area del parallelogramma individuato da due vettori del piano cartesiano, basta vederli come vettori dello spazio con l'ultima coordinata nulla e calcolare il modulo del loro prodotto vettoriale. Dunque $\vec{a} = (a_1, a_2)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2)$ vanno visti come $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$, il cui prodotto vettoriale è $\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1, 0, 0)$: il parallelogramma ha perciò area $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$.

• **Piani nello spazio: forma parametrica.** Dati due vettori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$ e $\vec{a}' = (a'_1, a'_2, a'_3) \neq \vec{0}$ non paralleli ed un punto $P_{\vec{b}} = (b_1, b_2, b_3)$, la forma parametrica del piano Π passante per $P_{\vec{b}}$ e parallelo a $\vec{a}$ e $\vec{a}'$ è

$$\begin{aligned} \Pi &= \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a} + \mathbb{R}\vec{a}' = \{\vec{b} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}' : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(b_1 + \alpha a_1 + \beta a'_1, b_2 + \alpha a_2 + \beta a'_2, b_3 + \alpha a_3 + \beta a'_3) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

[25]Significa che, dirigendo il dito indice della mano destra lungo $\vec{a}$ ed il dito medio della mano destra lungo $\vec{b}$, il verso di $\vec{a} \wedge \vec{b}$ è indicato dal dito pollice della mano destra. Così accade ad esempio per la terna canonica $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: si noti che $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$.

Come detto, il vettore $\vec{a} \wedge \vec{b}$ è ortogonale a Π e dunque la forma parametrica della retta $r^{\perp}$ passante per $P_{\vec{b}}$, ed ortogonale a Π è $r^{\perp} = \vec{b} + \mathbb{R}(\vec{a} \wedge \vec{a}')$. Per la distanza di $Q_{\vec{c}}$ dal piano Π basterà considerare la proiezione ortogonale di $\vec{b} - \vec{c}$ su $\vec{a} \wedge \vec{a}'$, ovvero

$$\mathrm{dist}(Q_{\vec{c}}, \Pi) = \frac{|(\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} \wedge \vec{a}')|}{|\vec{a} \wedge \vec{a}'|}.$$

Ciò in particolare dà anche la formula della *distanza di una retta o di un piano paralleli a* Π: sarà la distanza di una qualsiasi loro punto da Π. Se $P'_{\vec{b}'}$ è un qualsiasi punto di una tale retta r' o piano Π', si ottiene allora

$$\mathrm{dist}(r, \Pi) = \mathrm{dist}(\Pi', \Pi) = \frac{|(\vec{b} - \vec{b}') \cdot (\vec{a} \wedge \vec{a}')|}{|\vec{a} \wedge \vec{a}'|}.$$

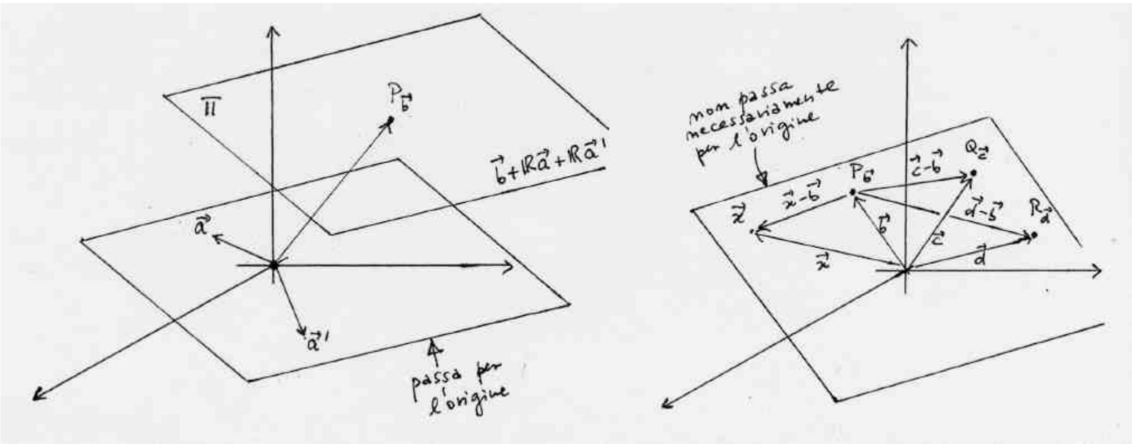

Figura 2.5: *Forma parametrica di un piano nello spazio; piano per tre punti.*

• **Piani nello spazio: forma cartesiana.** Sono i luoghi geometrici dei punti (x, y, z) dello spazio che soddisfano equazioni lineari:

$$ux + vy + wz + t = 0, \qquad (\text{con } u, v, w, t \in \mathbb{R} \text{ e } (u, v, w) \neq (0, 0, 0)).$$

Tale piano Π è parallelo al piano $ux + vy + wz = 0$, che passa per l'origine $(0, 0, 0)$; si noti che il vettore (u, v, w) è ortogonale a tutti i vettori di tale piano. Ne ricaviamo subito che *due piani dati in forma cartesiana* $u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$ *e* $u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$ *sono paralleli se e solo se i vettori* (u_1, v_1, w_1) *e* (u_2, v_2, w_2) *sono paralleli*. Inoltre, per la distanza di $Q_{\vec{c}}$ dal piano Π basterà considerare la proiezione ortogonale di $\vec{b} - \vec{c}$ su (u, v, w), ove $P_{\vec{b}}$ è un qualsiasi punto che sta sul piano Π: supponendo ad esempio che sia $u \neq 0$ si può prendere $P_{\vec{b}} = (-\frac{t}{u}, 0, 0)$, da cui $\vec{b} - \vec{c} = -(c_1, c_2, c_3 + \frac{t}{u})$: dalla formula della distanza data in precedenza si ottiene allora

$$\mathrm{dist}(Q_{\vec{c}}, \Pi) = \frac{|uc_1 + vc_2 + wc_3 + t|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

In particolare, se Π' è un piano parallelo a Π (dunque l'equazione di Π' sarà del tipo $ux+vy+wz+t'=0$, un qualsiasi punto $Q_{\vec{c}}$ di Π' soddisfa l'equazione $uc_1+vc_2+wc_3+t = (uc_1+vc_2+wc_3+t')+(t-t') = 0+(t-t') = t-t'$ da cui

$$\mathrm{dist}(\Pi',\Pi) = \frac{|t-t'|}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}.$$

• **Piani nello spazio: dalla forma cartesiana alla forma parametrica.** Se un piano Π dello spazio è dato nella sua forma cartesiana $ux+vy+wz+t=0$:

(1) si prenda un qualsiasi punto $P_{\vec{b}}$ di Π, ad esempio $\vec{b} = (0,0,-\frac{t}{w})$ (se $w \neq 0$) oppure $\vec{b} = (0,-\frac{w}{v},0)$ (se $v \neq 0$) oppure $\vec{b} = (-\frac{w}{u},0,0)$ (se $u \neq 0$);

(2) considerato il piano parallelo a Π passante per $(0,0,0)$ (ovvero $ux+vy+wz=0$), si prendano una qualsiasi coppia $\vec{a},\vec{a}'$ di vettori non nulli e non paralleli in essa contenuti, ad esempio due scelti tra $(0,w,-v)$, $(w,0,-u)$ e $(v,-u,0)$;

(3) si costruisce la forma parametrica $r = \vec{b}+\mathbb{R}\vec{a}+\mathbb{R}\vec{a}'$.

• **Piani nello spazio: dalla forma parametrica alla forma cartesiana.** Se un piano Π dello spazio è dato nella sua forma parametrica $\vec{b}+\mathbb{R}\vec{a}+\mathbb{R}\vec{a}'$:

(1) si calcoli $\vec{a}\wedge\vec{a}'$, e diciamo che sia uguale a $(u,v,w) \neq (0,0,0)$;

(2) la sua equazione cartesiana sarà dunque della forma $ux+vy+wz+k=0$, con $k \in \mathbb{R}$ da determinare;

(3) per determinare k, basta imporre il passaggio per $P_{\vec{b}}$, ovvero $ub_1+vb_2+wb_3+k=0$ (da cui $k = -ub_1-vb_2-wb_3$).

• **Piano per tre punti.** Per tre punti distinti e non allineati $P_{\vec{b}} = (b_1,b_2,b_3)$, $Q_{\vec{c}} = (c_1,c_2,c_3)$ e $R_{\vec{d}} = (d_1,d_2,d_3)$ passa uno ed un solo piano Π. Per la sua forma parametrica, il piano sarà parallelo ai vettori $\vec{a} = \vec{c}-\vec{b} = (c_1-b_1,c_2-b_2,c_3-b_3)$ e $\vec{a}' = \vec{d}-\vec{b} = (d_1-b_1,d_2-b_2,d_3-b_3)$ e dovrà passare per $P_{\vec{b}}$: si ottiene dunque

$$\Pi = \vec{b}+\mathbb{R}\vec{a}+\mathbb{R}\vec{a}' = \{\vec{b}+\alpha(\vec{c}-\vec{b})+\beta(\vec{d}-\vec{b}) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}.$$

Passando alla forma cartesiana, denotato con $\vec{x} = (x,y,z)$ il vettore generico di $\mathbb{R}^3$, l'equazione è data dalla condizione di complanarità per i vettori $\vec{x}-\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{b}$ e $\vec{d}-\vec{b}$, ovvero

$$\det\begin{pmatrix} x-b_1 & y-b_2 & z-b_3 \\ c_1-b_1 & c_2-b_2 & c_3-b_3 \\ d_1-b_1 & d_2-b_2 & d_3-b_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Esempi. **(1)** Dati i vettori $\vec{a} = (-1,0,3)$, $\vec{a}' = (2,1,-1)$ e $\vec{b} = (4,-1,-2)$, la forma parametrica del piano Π passante per $P_{\vec{b}}$ e parallelo ai vettori $\vec{a}$ e $\vec{a}'$ è $\Pi = \vec{b}+\mathbb{R}\vec{a}+\mathbb{R}\vec{a}' = \{\vec{b}+\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}' : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} =$

$\{(4-\alpha+2\beta, -1+\beta, -2+3\alpha-\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Un vettore ortogonale a tale piano è $\vec{a} \wedge \vec{a}' = (-3, 0, -6)$, e dunque (eliminando lo scalare moltiplicativo -3) anche il vettore $(1, 0, 2)$; ne deduciamo che l'equazione cartesiana di Π avrà la forma $1x+0y+2z+k = 0$, ovvero $x+2z+k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo il passaggio per $P_{\vec{b}}$, che dà $-1+2(3)+k = 0$, ovvero $k = -5$: si ottiene perciò $x+2z-5 = 0$. **(2)** Cerchiamo una forma parametrica per il piano Π dato dall'equazione cartesiana $3x - y + 4z - 5 = 0$. Un suo punto è, ad esempio, $P_{\vec{b}} = (1, -2, 0)$; due vettori non paralleli contenuti nel piano ad esso parallelo e passante per l'origine $3x - y + 4z = 0$ sono ad esempio $\vec{a} = (1, 3, 0)$ e $\vec{a}' = (0, 4, 1)$, da cui la forma parametrica $\Pi = \vec{b}+\mathbb{R}\vec{a}+\mathbb{R}\vec{a}' = \{\vec{b}+\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}' : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(1+\alpha, -2+3\alpha+4\beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. **(3)** La distanza del punto $Q_{\vec{c}} = (4, 2, -1)$ dal piano Π dell'esempio precedente (ovvero $3x - y + 4z - 5 = 0$) è data da $\text{dist}(Q_{\vec{c}}, \Pi) = \frac{|3(4)-(2)+4(-1)-5|}{\sqrt{(3)^2+(-1)^2+(4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$. Partendo invece dalla suddetta forma parametrica di Π (ovvero $\Pi = \vec{b}+\mathbb{R}\vec{a}+\mathbb{R}\vec{a}'$ con $\vec{a} = (1, 3, 0)$, $\vec{a}' = (0, 4, 1)$ e $\vec{b} = (1, -2, 0)$) ricaviamo $\vec{a} \wedge \vec{a}' = (1, 3, 0) \wedge (0, 4, 1) = (3, -1, 4)$ (che è infatti coerente con la forma cartesiana), da cui $\text{dist}(Q_{\vec{c}}, \Pi) = \frac{|(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{a}\wedge\vec{a}')|}{|\vec{a}\wedge\vec{a}'|} = \frac{|(-3,-4,1)\cdot(3,-1,4)|}{|(3,-1,4)|} = \frac{1}{\sqrt{26}}$. **(4)** Determiniamo il piano Π passante per i tre punti $P_{\vec{b}} = (0, -1, 2)$, $Q_{\vec{c}} = (-3, 2, 4)$ e $R_{\vec{d}} = (2, 0, 5)$. Per la forma parametrica, come detto, il piano Π sarà parallelo ai vettori $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b} = (-3, 3, 2)$ e $\vec{a}' = \vec{d} - \vec{b} = (2, 1, 3)$ e dovrà passare per $P_{\vec{b}}$: sarà dunque $\Pi = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a} + \mathbb{R}\vec{a}' = \{(0, -1, 2) + \alpha(-3, 3, 2) + \beta(2, 1, 3) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(-3\alpha + 2\beta, -1 + 3\alpha + \beta, 2 + 2\alpha + 3\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. La forma cartesiana è invece data da $\det\begin{pmatrix} x-b_1 & y-b_2 & z-b_3 \\ c_1-b_1 & c_2-b_2 & c_3-b_3 \\ d_1-b_1 & d_2-b_2 & d_3-b_3 \end{pmatrix} = 0$, ovvero $\det\begin{pmatrix} x & y+1 & z-2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$, ovvero $7x+13y-9z+31 = 0$. Si noti che alla stessa equazione cartesiana si approda anche a partire dalla forma parametrica: infatti da $\vec{a} \wedge \vec{a}' = (\vec{c} - \vec{b}) \wedge (\vec{d} - \vec{b}) = (-3, 3, 2) \wedge (2, 1, 3) = (7, 13, -9)$ si deduce che l'equazione deve avere la forma $7x + 13y - 9z + k = 0$ con $k \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo il passaggio per un punto; ad esempio, imponendo il passaggio per $R_{\vec{d}}$ (ma anche con $P_{\vec{b}}$ o $Q_{\vec{c}}$ si otterrebbe la stessa cosa) si trova $7(2) + 13(0) - 9(5) + k = 0$, ovvero $k = 31$.

• **Rette nello spazio: forma parametrica.** Dato un vettore $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$ ed un punto $P_{\vec{b}} = (b_1, b_2, b_3)$, la forma parametrica della retta r passante per $P_{\vec{b}}$ e parallela ad $\vec{a}$ è

$$r = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a} = \{\vec{b} + \alpha\vec{a} : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(b_1 + \alpha a_1, b_2 + \alpha a_2, b_3 + \alpha a_3) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Dato un altro punto $Q_{\vec{c}}$, la distanza di $Q_{\vec{c}}$ dalla retta $r = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}$ è data dall'altezza del parallelogramma costruito sui vettori $\vec{b} - \vec{c}$ e $\vec{a}$, ovvero dalla sua area (pari a $|(\vec{b} - \vec{c}) \wedge \vec{a}|$) diviso la lunghezza di suo lato (ad esempio $|\vec{a}|$):

$$\text{dist}(Q_{\vec{c}}, r) = \frac{|(\vec{b} - \vec{c}) \wedge \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

• **Rette nello spazio: forma cartesiana.** Sono i luoghi geometrici dei punti (x, y, z) dello spazio determinati dall'intersezione di due piani non paralleli: si tratta dunque dei luoghi geometrici che soddisfano sistemi lineari risolubili di rango 2

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{con rg}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & t_2 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix} = 2.$$

• **Rette nello spazio: dalla forma cartesiana alla forma parametrica.** Se una retta r dello spazio è data nella sua forma cartesiana:

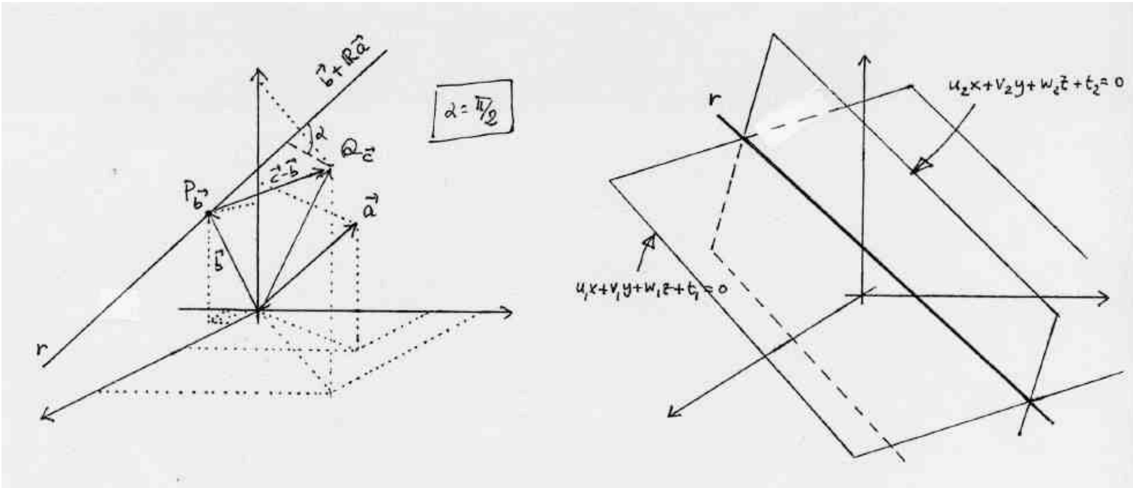

Figura 2.6: *Forma parametrica e forma cartesiana di una retta nello spazio.*

(1) si prenda un qualsiasi punto $P_{\vec{b}}$ di r;

(2) considerata la retta parallela ad r passante per $(0,0)$ (ovvero la stessa con $t_1 = t_2 = 0$), si prenda un qualsiasi vettore $\vec{a} \neq \vec{0}$ in essa contenuto (ad esempio si ponga una delle tre coordinate x, y, z uguale a 1 e si risolva il sistema nelle due rimanenti);

(3) si costruisce la forma parametrica $r = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}$.

• **Rette nello spazio: distanza tra due rette sghembe.** Due rette r ed r' nello spazio si dicono *sghembe* se non si intersecano. Scritte in forma parametrica $r = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}$ e $r' = \vec{b}' + \mathbb{R}\vec{a}'$, i piani $\Pi = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a} + \mathbb{R}\vec{a'}$ e $\Pi' = \vec{b}' + \mathbb{R}\vec{a} + \mathbb{R}\vec{a'}$ sono paralleli e contengono rispettivamente r e r', e sarà perciò

$$\operatorname{dist}(r, r') = \operatorname{dist}(\Pi, \Pi') = \frac{|(\vec{b} - \vec{b}') \cdot (\vec{a} \wedge \vec{a}')|}{|\vec{a} \wedge \vec{a}'|}.$$

• **Rette nello spazio: dalla forma parametrica alla forma cartesiana.** Se una retta r dello spazio è data nella sua forma parametrica $\vec{b} + \mathbb{R}\vec{a}$:

(1) nel sistema $\begin{cases} x = b_1 + \alpha a_1 \\ y = b_2 + \alpha a_2 \\ z = b_3 + \alpha a_3 \end{cases}$ si ricavi il parametro α da una delle tre equazioni, ad esempio $\alpha = \frac{x - b_1}{a_1}$ se $a_1 \neq 0$;

(3) sostituendo tale espressione nelle altre due equazioni, si ottengono due equazioni in x, y, z che danno una forma cartesiana per r.

• **Retta per due punti.** Per due punti distinti $P_{\vec{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ e $Q_{\vec{c}} = (c_1, c_2, c_3)$ passa una ed una sola retta r, la cui forma parametrica sarà ancora

$$r = \vec{b} + \mathbb{R}\vec{a} = \{\vec{b} + \alpha(\vec{c} - \vec{b}) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{((1-\alpha)b_1 + \alpha c_1, (1-\alpha)b_2 + \alpha c_2, (1-\alpha)b_3 + \alpha c_3) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Passando alla forma cartesiana, si ottiene la condizione

$$(x-b_1, y-b_2, z-b_3) \wedge (c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3) = (0,0,0)$$

che equivale al sistema (attenzione: di rango 2)

$$\begin{cases} (c_2-b_2)(x-b_1) = (c_1-b_1)(y-b_2), \\ (c_3-b_3)(x-b_1) = (c_1-b_1)(z-b_3), \\ (c_3-b_3)(y-b_2) = (c_2-b_2)(z-b_3). \end{cases}$$

Esempi. **(1)** Se $\vec{b} = (-1,3,-2)$ e $\vec{a} = (2,1,-4)$, la retta r passante per $P_{\vec{b}}$ e parallela ad $\vec{a}$ ha forma parametrica $\vec{b}+\mathbb{R}\vec{a} = \{(-1,3,-2)+\alpha(2,1,-4) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(-1+2\alpha, 3+\alpha, -2-4\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Dalla seconda equazione del sistema $\begin{cases} x = -1+2\alpha \\ y = 3+\alpha \\ z = -2-4\alpha \end{cases}$ ricaviamo $\alpha = y-3$, da cui, sostituendo nelle prime due, si ottiene la forma cartesiana $\begin{cases} x = -1+2(y-3) \\ z = -2-4(y+3) \end{cases}$, ovvero $\begin{cases} x-2y+7=0 \\ 4y+z=-14 \end{cases}$. Se $\vec{c} = (0,3,-1)$, la distanza di $Q_{\vec{c}}$ da r è $\mathrm{dist}(Q_{\vec{c}}, r) = \frac{|(-1,0,-1)\wedge(2,1,-4)|}{|(2,1,-4)|} = \frac{|(1,-6,-1)|}{|(2,1,-4)|} = \sqrt{\frac{38}{21}}$. **(2)** Consideriamo la retta r in forma cartesiana $\begin{cases} 2x-y+z+3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$. Ponendo $z=0$, dalla seconda equazione ricaviamo $x=1$, e dalla prima $y = 2x+z+3 = 2(1)+(0)+3 = 5$: dunque il punto $P_{\vec{b}} = (1,5,0)$ appartiene a r. La retta r' parallela ad r passante per l'origine ha equazioni $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$; cerchiamo un vettore $\vec{a} \neq \vec{0}$ che appartiene a r'. Posto ad esempio $z=1$ si ricava $x=1$ e dunque $y = 2x+z = 2(1)+(1) = 3$: un vettore è dunque $\vec{a} = (1,3,1)$. Una forma parametrica per r è dunque $r = \vec{b}+\mathbb{R}\vec{a} = \{(1,5,0)+\alpha(1,3,1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(1+\alpha, 5+3\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. **(3)** Dati i vettori $\vec{a} = (2,1,-4)$, $\vec{a}' = (1,-3,1)$, $\vec{b} = (-1,3,-2)$ e $\vec{b}' = (0,1,0)$, le due rette $r = \vec{b}+\mathbb{R}\vec{a}$ (passante per $P_{\vec{b}}$ e parallela al vettore $\vec{a}$) e $r' = \vec{b}'+\mathbb{R}\vec{a}'$ (passante per $Q_{\vec{b}'}$ e parallela al vettore $\vec{a}'$) sono sghembe: infatti, dall'uguaglianza delle loro forme parametriche $(x,y,z) = (-1+2\alpha, 3+\alpha, -2-4\alpha) = (\beta, 1-3\beta, \beta)$ si ottiene il sistema $\begin{cases} -1+2\alpha = \beta \\ 3+\alpha = 1-3\beta \\ -2-4\alpha = \beta \end{cases}$ che non ha soluzioni (α, β) (infatti dalla prima equazione si ricava $\beta = 2\alpha-1$, dunque dalla seconda $-2-4\alpha = 2\alpha-1$ ovvero $\alpha = -\frac{1}{6}$, da cui $\beta = 2(-\frac{1}{6})-1 = -\frac{4}{3}$: ma ciò è incompatibile con la terza equazione, in quanto $3+(-\frac{1}{6}) \neq 1-3(-\frac{4}{3})$). Come detto, la loro distanza è data da $\mathrm{dist}(r,r') = \frac{|(\vec{b}-\vec{b}')\cdot(\vec{a}\wedge\vec{a}')|}{|\vec{a}\wedge\vec{a}'|}$: si ha $\vec{a}\wedge\vec{a}' = (-11,-6,-7)$ (da cui $|\vec{a}\wedge\vec{a}'| = \sqrt{121+36+49} = \sqrt{206} \sim 14,3$, poi $\vec{b}-\vec{b}' = (-1,2,-2)$ e $(\vec{b}-\vec{b}')\cdot(\vec{a}\wedge\vec{a}') = (-1,2,-2)\cdot(-11,-6,-7) = 11-12+14 = 13$, da cui $\mathrm{dist}(r,r') = \frac{13}{\sqrt{206}} \sim 0,9$. **(4)** Dati i punti $\vec{b} = (2,-1,1)$ e $\vec{c} = (0,1,-4)$, la forma parametrica della retta per essi è $\{\vec{b}+\alpha(\vec{c}-\vec{b}) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{((2-2\alpha, -1+2\alpha, 1-5\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. La forma cartesiana si può ricavare direttamente dalla forma parametrica: da $x = 2-2\alpha$ si ottiene $\alpha = 1-\frac{x}{2}$, e sostituendo nelle altre due equazioni $y = -1+2\alpha$ e $z = 1-5\alpha$ si ottiene $\begin{cases} y = -1+2(1-\frac{x}{2}) \\ z = 1-5(1-\frac{x}{2}) \end{cases}$, ovvero $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 5x-2z-8=0 \end{cases}$. La forma cartesiana si può però ottenere anche dalla suddetta condizione $(x-b_1, y-b_2, z-b_3)\wedge(c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3) = (0,0,0)$, ovvero $(x-2, y+1, z-1)\wedge(-2,2,-5) = (0,0,0)$, ovvero $(-5(y+1)-2(z-1), 5(x-2)-2(z-1), 2(x-2)+2(y+1)) = (0,0,0)$, ovvero il sistema $\begin{cases} 5y+2z+3=0 \\ 5x-2z-8=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ (che è di rango 2: ad esempio la prima equazione è inutile, perché dipende dalle altre due). E si ritrova lo stesso risultato.