Esame di Laboratorio di Calcolo Numerico

Dott.ssa Elena Gaburro

Verona, 05 Febbraio 2016

Versione C

NOME: ....

COGNOME: ....

NUMERO DI MATRICOLA: ....

Istruzioni

Tempo: 2 ore e 10 minuti

Per ciascun esercizio sarà necessario scrivere un file principale che eventualmente ne invocherà altri. I **file principali** di ciascun esercizio devono chiamarsi rispettivamente `main1.m, main2.m, main3.m`. All'interno dei file principali deve essere riportato il vostro **nome, cognome, numero di matricola**.

Al termine dell'esame dovete inviare una **mail dal vostro indirizzo istituzionale** agli indirizzi **elena.gaburro@unitn.it** e **leonardpeter.bos@univr.it** con:
OGGETTO: Esame calcolo numerico
ALLEGATO: un **unico file zip** (con nome così composto: Nome_Cognome_Matricola, es. Mario_Rossi_VR123456) contenente **tutti** i file destinati alla correzione.
Chi volesse **ritirarsi** deve comunque mandare una mail con nome, cognome, numero di matricola e il testo "MI RITIRO" (se si vuole mantenere un voto ottenuto in un appello precedente ciò deve essere segnalato esplicitamente nella mail).

Chi consegna l'esame **annulla automaticamente** qualsiasi voto ottenuto negli appelli precedenti.

È concesso l'uso di appunti, dispense e dei propri codici.
È vietato l'uso di cellulari ed è vietato comunicare con i compagni in qualsiasi modo.

Le immagini devono essere chiaramente interpretabili.
Il codice deve essere ordinato, indentato e ogni passaggio deve essere adeguatamente motivato.

È obbligatorio **riconsegnare il testo dell'esame** al termine della prova.

Esercizio 1 **12 punti**

Sia data la funzione $f(x) = x^2 - 2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}$.

a) Si determini una funzione $h(x)$ tale che $f(x) = h^2(x)$. Le due equazioni $f(x) = 0$ e $h(x) = 0$ sono equivalenti? Cioè hanno lo stesso intervallo di definizione?, le stesse soluzioni?, con la stessa molteplicità?.

b) Tracciare il grafico di $f(x)$ e $h(x)$ in un opportuno intervallo attorno al loro zero.

c) Per il calcolo degli zeri applicare il metodo di Newton implementato usando un criterio d'arresto **misto** basato sullo scarto tra due iterate successive e, un test sul numero massimo di iterate (scegliere tolleranza assoluta $tol_a = 10^{-9}$, tolleranza relativa $tol_r = 10^{-11}$, guess iniziale $x_0 = 1.2$ e numero massimo di iterazioni 150). Calcolare numericamente l'ordine di convergenza del metodo applicato sia alla funzione $f(x)$ sia ad $h(x)$. Rispetta le attese? Perché?

d) Utilizzare il metodo di punto fisso per calcolare gli zeri di $f(x)$ considerando la seguente funzione per costruire l'iterazione di punto fisso

$$g(x) = x - \frac{x - e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

Calcolare numericamente l'ordine di convergenza del metodo. Anche alla luce della seguente uguaglianza

$$g(x) = x - \frac{x - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = x - 2 \cdot \frac{(x - e^{-x})^2}{2(1 + e^{-x})(x - e^{-x})} = x - 2\,\frac{??}{??}$$

dire se l'ordine di convergenza del metodo rispetta le attese.

Esercizio 2 **11 punti**

Si consideri la matrice $A \in \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10}$

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -\sqrt{1} & & & & & \\ -1+\frac{1}{2} & 13 & -\sqrt{3} & & & & \\ & -1+\frac{1}{3} & 15 & -\sqrt{5} & & & \\ & & -1+\frac{1}{4} & 17 & -\sqrt{7} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1+\frac{1}{9} & 27 & -\sqrt{17} \\ \mathbf{99} & & & & & -1+\frac{1}{10} & 29 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10}$$

a) Si costruisca, attraverso opportuni comandi, la matrice A in Matlab.
Si determini il termine noto $\mathbf{b}$ in modo che la soluzione di riferimento del sistema $A^{\mathbf{2}}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sia il vettore $\mathbf{xRif} = [1; 1;\ \dots\ ; 1] \in \mathbb{R}^{10}$.

b) Si risolva numericamente il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando un metodo diretto.

c) Risolvere il sistema lineare $A^{\mathbf{2}}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con un metodo diretto che non preveda il calcolo della potenza A^2, ma solo la fattorizzazione $PA = LU$. Spiegare la strategia utilizzata.
Si utilizzi l'apposito comando Matlab per il calcolo della fattorizzazione LU della matrice A.
Per risolvere i semplici sistemi lineari connessi alle matrici ottenute dalla fattorizzazione è **vietato** usare il comando \ di MATLAB (scegliere quindi le apposite routine tra quelle per sistemi diagonali, triangolari, ortogonali viste a lezione).
Controllare che la soluzione ottenuta coincida con quella di riferimento.

d) Si vuole ora risolvere $A^{\mathbf{11}}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dopo aver ricalcolato il termine noto $\mathbf{b}$ affinché la soluzione di riferimento sia composta da tutti 1, estendere la strategia adottata nel punto precedente a questa situazione. (Quindi evitare il calcolo della potenza A^{11} nella risoluzione del sistema ed utilizzare solo la fattorizzazione LU di A. Si può invece calcolare $A^{\mathbf{11}}$ per trovare $\mathbf{b}$.)

Esercizio 3 **10 punti**

Si vuole approssimare il valore di $2/\log 3$ mediante la seguente relazione

$$\frac{2}{\log 3} = \int_0^1 3^x dx$$

e sfruttando il metodo dei trapezi composito (con log si intende il logaritmo in base e) .

a) Si stimi numericamente in quanti sotto-**intervalli** va ripartito l'intervallo $[0, 1]$ affinché l'errore relativo sia minore di 10^{-5}.

b) Si riporti in un grafico in scala logaritmica l'andamento dell'errore relativo rispetto al numero di sotto-intervalli in cui è diviso $[0, 1]$. Dal grafico si può dedurre l'ordine di convergenza del metodo? Come?
Rispetta le attese? Perché?

Valutazione:

- 31,32, 33 punti su 33 → voto: 30 e LODE
- a un punteggio tra 18 e 30 corrisponde il rispettivo voto tra 18 e 30
- 17 punti su 33 → insufficiente, ma comunque ammesso all'orale
- meno di 17 punti su 33 → insufficiente e NON ammesso all'orale