Trasporto parallelo e derivata covariante

(per connessioni affini) [v. Amari - Nagaoka Methods of Information Theory AMS - 2000]

Approccio: classico - moderno

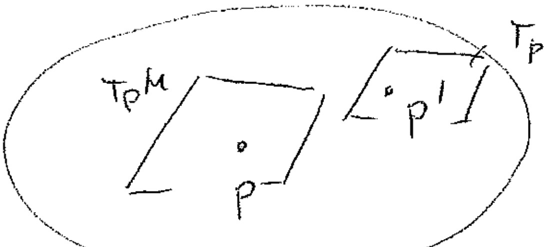
- classico → linguaggio formale degli infinitesimi
- moderno → terminologia

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Lezione XLI Prof. M. Spera

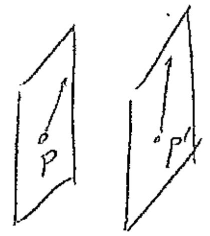
Concetto di connessione

(ξ^i) sist. di coordinate



M

$$d\xi^i := \xi^i(p') - \xi^i(p)$$



vogliamo costruire:

("trasporto parallelo infinitesimo" $\equiv$ connessione affine)

$$\Pi_{p,p'} : T_pM \longrightarrow T_{p'}M \quad \text{lineare}$$

cerchiamo di identificare i vettori dei due spazi in modo consistente

$\|$ non c'è nessun modo "canonico" di farlo $\|$

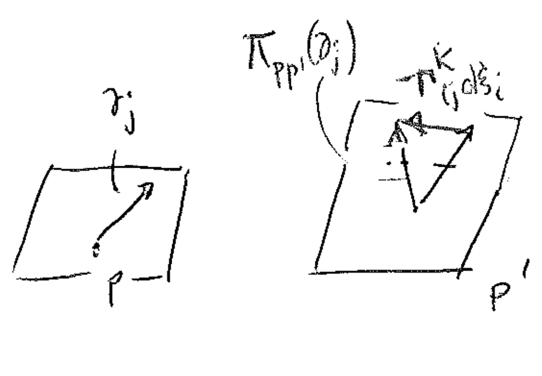
vogliamo però: C^∞

$$\Pi_{pp'}(e_j|_p) = e_j|_{p'} - d\xi^i \, \Gamma^k_{ij}(p) \, e_k|_{p'}$$

$$e_j = \partial_j = \partial_{\xi^j}$$

Γ^k_{ij}: simboli di Christoffel (generalizzati)

"correzione al prim'ordine" di e_j tramite un vettore "infinitesimo"



Vogliamo che tutto sia intrinsecamente definito i.e non dipenda dal sistema di coordinate impiegato

Sia dato un altro sistema: $(\eta^1 \dots \eta^n)$

Sia $$\tilde{\partial}_r = \frac{\partial}{\partial \eta^r} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^r} = \partial_i \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^r}$$

In virtù della linearità

$$\Pi_{pp'}\left(\tilde{\partial}_s|_p\right) = \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^s}(p)\left\{\partial_j|_{p'} - d\xi^i \Gamma^k_{ij}(p)\,\partial_k|_{p'}\right\}$$

ma da $$\frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^s}(p') = \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^s}(p) + \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial \eta^r \partial \eta^s}(p)\, d\eta^r + \dots$$

e $$d\xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^r}(p)\, d\eta^r \qquad d\eta^r = \eta^r(p') - \eta^r(p)$$

si trova subito, sostituendo

$$\Pi_{pp'}\left(\tilde{\partial}_s|_p\right) = \tilde{\partial}_s|_{p'} - d\eta^r \tilde{\Gamma}^t_{rs}(p)\, \tilde{\partial}_t|_{p'}\,,$$ che

ha la stessa forma dell'altra, ponendo

$$(*)\quad \hat{\Gamma}^t_{rs}(p) = \left\{ \Gamma^k_{ij}(p) \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^r} \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^s}(p) + \underbrace{\frac{\partial^2 \xi^k}{\partial \eta^r \partial \eta^s}(p)}_{} \right\} \frac{\partial \eta^t}{\partial \xi^k}(p)$$

questo non dovrebbe esserci

⚠ Le Γ^k_{ij} <u>non</u> forniscono un tensore!

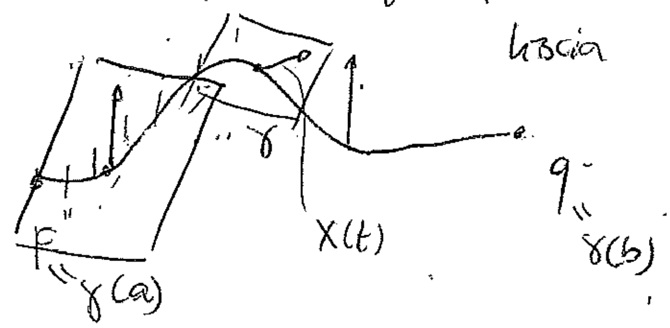
Dunque, una connessione affine è specificata dalle Γ^i_{jk}, soggette a $(*)$ relativamente ad un cambiamento di coordinate

$\gamma : [a,b] \to M$ liscia

Sia ora

$X : t \mapsto X(t)$

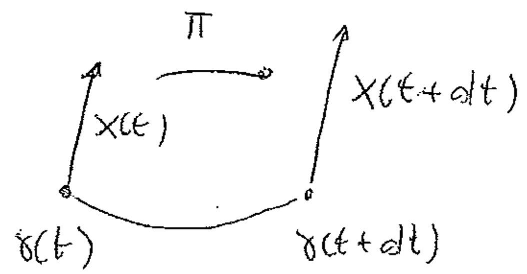
un campo vettoriale (liscio) lungo γ



✱ Esso si dice <u>parallelo</u> lungo γ se

$$(\blacklozenge)\quad X(t+dt) = \Pi_{\gamma(t),\gamma(t+dt)} X(t)$$

i.e. il <u>valore</u> di X in un pto prossimo della curva è <u>quello</u> specificato dalla <u>connessione</u>



in coordinate (e in virtù della linearità di Π)

$$\Pi_{\gamma(t),\gamma(t+dt)} X(t) = \left\{ X^k(t) - dt \cdot \dot\gamma^i(t) X^j(t) \Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) \right\} \cdot (\partial_k)_{\gamma(t+dt)}$$

ma $X(t+dt) = X^i(t+dt)\, \partial_i \big|_{\gamma(t+dt)}$

da (◈) $\Rightarrow$

$$\boxed{\dot X^k(t) + \dot\gamma^i(t) X^j(t) \Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) = 0}$$

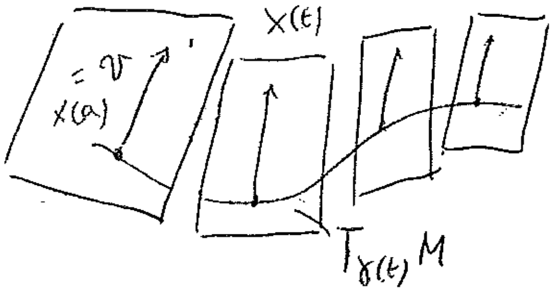
in forma condensata

$$\boxed{\dot X^k + \Gamma^k_{ij} \dot\gamma^i X^j = 0} \qquad k = 1 \dots n$$

★ sist. eq. diff. lineari del prim'ordine

$\Rightarrow$ per il teorema di esistenza e unicità di Cauchy-Lipschitz, dato $v = X(a)$,

$\exists!$ $X(t)$ parallelo lungo γ con $X(a) = v$

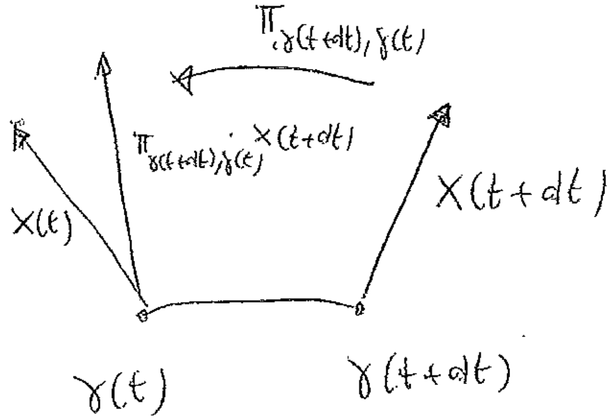


★ trasporto parallelo di un vettore lungo una curva possiamo a questo punto definire la derivata covariante $\frac{\nabla X}{dt}(t)$

poniamo

$$\nabla X(t) = \left(\Pi_{\gamma(t+dt),\gamma(t)} X(t+dt)) - X(t) \right)$$

(derivata ordinaria: $dX(t) = X(t+dt) - X(t)$



in coordinate:

$$\boxed{\frac{\nabla X(t)}{dt} = \left\{ \dot X^k(t) + \Gamma^k_{ij}(\dot\gamma^i(t)) X^j(t) \right\} \partial_k\big|_{\gamma(t)}}$$

vettore parallelo $\equiv \frac{\nabla}{dt} X \equiv 0$ derivata covariante nulla lungo γ

$$\boxed{\dot X^k(t) + \Gamma^k_{ij}\dot\gamma^i X^j = 0}$$

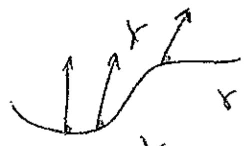
(geodetiche generalizzate: ... .
curve auto parallele:

v. oltre $\boxed{\ddot\gamma^k + \Gamma^k_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j = 0}$)

Estensioni:

Si può definire allora con la stessa formula

$$\left(\nabla_X Y\right)_{\gamma(t)}$$

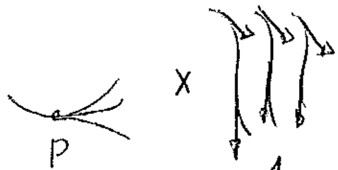


$X = x^i \partial_i$ lungo γ

derivata covariante di Y (def. su γ) lungo X (pure definito su γ)

e, ponendo

$$\nabla_X Y(p) = \nabla_{X_p} Y$$



flusso di X

la derivata covariante di Y rispetto a X tout-court:

$$\boxed{\nabla_X Y = X^i \left\{ \partial_i Y^k + \Gamma^k_{ij} Y^j \right\} \partial_k}$$

Se $X = \partial_i \quad Y = \partial_j$

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k$$

compi collante

$\nabla : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$

$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$

Astraiamo:

i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ più in generale, linearità

iii) $\nabla_X (fY) = \underset{\underset{df(X)}{\parallel}}{X(f)} Y + f \nabla_X Y$: Leibniz

(iv) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

XLI - 5

si possono utilizzare per una trattazione assiomatica

*** <u>Formula</u> <u>di</u> <u>Koszul</u> per la connessione di <u>Levi-Civita</u> $\boxed{\text{sia } (M,g) \text{ una varietà Riemanniana}}$

$\nabla \equiv \overset{LC}{\nabla}$ univocamente definita dalle richieste:

$g(Y,Z) \equiv \langle Y, Z\rangle$ etc.

$\Rightarrow$ ① metricità (compatibilità con la metrica $\equiv$ il trasporto parallelo conserva le lunghezze)

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

[cf. es. in $\mathbb{R}^3$, $\underline{a} = \underline{a}(t)$, $\underline{b} = \underline{b}(t)$,

$$\frac{d}{dt}\langle \underline{a}, \underline{b}\rangle = \langle \frac{d\underline{a}}{dt}, \underline{b}\rangle + \langle \underline{a}, \frac{d\underline{b}}{dt}\rangle$$

$\Rightarrow$ ② "assenza di torsione" $\equiv$ "simmetria"

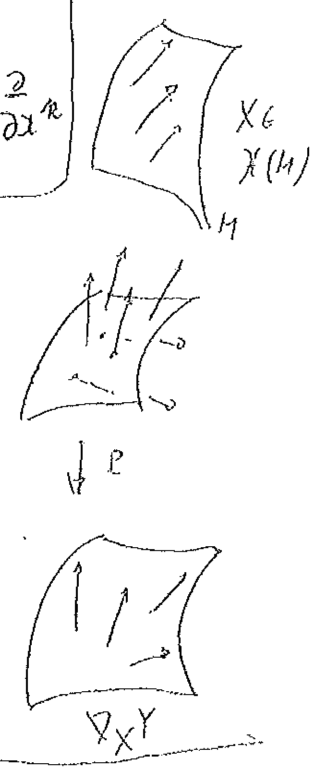
$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

(se $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$

corrisponde a $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$

simmetria

*** <u>Levi-Civita</u>



Dim. Sia ∇ esistente: allora

$$\begin{array}{r|l} + & X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ + & Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ - & Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \end{array}$$

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle =$$

$$\langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \underbrace{\nabla_X Z - \nabla_Z X}_{[X,Z]}\rangle + \langle X, \underbrace{\nabla_Y Z - \nabla_Z Y}_{[Y,Z]}\rangle$$

$$= \langle 2\nabla_Y X + \underbrace{(\nabla_X Y - \nabla_Y X)}_{[X,Y]}, Z\rangle$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle$$
$$= 2\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Z\,[X\,Y]\rangle + \langle Y\,[X,Z]\rangle + \langle X\,[Y,Z]\rangle$$

"six term formula" "formula a 6 termini di Koszul"

$\Rightarrow$

$$\boxed{(*)\quad \langle \nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}\Big\{ X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle Z,[X,Y]\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle X\,[Y,Z]\rangle \Big\}}$$

$\Rightarrow$ Se ∇ esiste, è univoc. determinata.

Definendo, viceversa, $\nabla_Y X$ tramite $(*)$, è subito visto che valgono le due proprietà caratteristiche.

In coordinate locali

$X = e_j$ $\quad \nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij} e_k$ $\qquad \langle \Gamma^k_{ij} e_k, e_\ell\rangle = \Gamma^k_{ij}\, g_{k\ell}$

$Y = e_i$

$Z = e_\ell$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^\ell} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{k\ell} \left\{ \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right\}$$

inversa

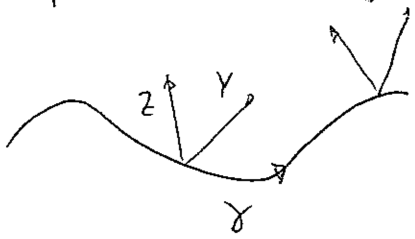
$$\Gamma^k_{ij}\, \underbrace{\underbrace{g_{k\ell}\, g^{\ell m}}_{\delta_{km}}}_{\Gamma^m_{ij}} = \frac{1}{2} g^{\ell m}\{ \quad\text{———}\quad \} = $$

[si ponga alla fine $m = k$ ...]

Significato della compatibilità con la metrica

$$X \underbrace{\langle Y, Z \rangle}_{g(Y,Z)} = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad :$$

il trasporto parallelo conserva i prodotti scalari (e pertanto angoli e distanze)



siano Y e Z paralleli lungo γ (per fissare le idee, curva integrale di X)

allora è $\nabla_X Y = \nabla_X Z = 0$

$$\Rightarrow \qquad X \langle Y, Z \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle Y, Z \rangle \text{ costante}$$

lungo γ.