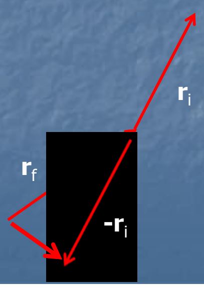
Serway, Jewett
Principi di Fisica
IV Ed.
Capitolo 3

Moti in due dimensioni

Caso bidimensionale: tutte le grandezze viste fino ad ora (posizione, velocità, accelerazione devono essere trattate come vettori).

La posizione di una particella viene descritta da un vettore posizione **r**, tracciato dall'origine del sistema di riferimento fino al punto occupato dalla particella.

(Le coordinate cartesiane della particella non sono altro che le componenti del vettore posizione).



$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_f-\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_f+(-\mathbf{r}_i)$

definizione

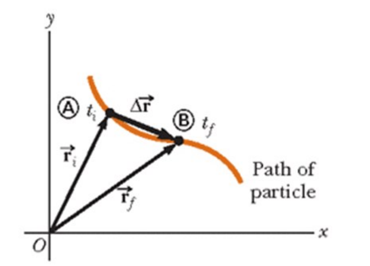


FIGURA 3.1 Una particella che si muove nel piano xy è localizzata dal vettore posizione $\vec{r}$ racciato dall'origine alla particella. Lo spostamento della particella allorquando essa si muove da Ⓐ a Ⓑ ell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ è uguale al vettore $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i$.

Serway, Jewett – Principi di Fisica, IV Ed. – Capitolo 3

Grandezze cinematiche in 2 dimensioni

Consideriamo una particella che si muove su una traiettoria piana e la cui posizione sia descritta al tempo t_i dal vettore $\mathbf{r}_i$ e al tempo t_f dal vettore $\mathbf{r}_f$. Definiamo il vettore spostamento come:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_{media} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Essendo Δt un numero sempre >0 la velocità è una grandezza vettoriale con direzione e verso quello dello spostamento.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

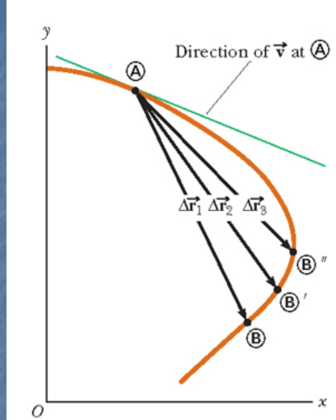


FIGURA 3.2 Quando la parti-

Al limite per Δt tendente a 0, la direzione di v è quella della retta tangente.

Il vettore velocità istantanea è la derivata rispetto al tempo del vettore posizione

Vietato spaventarsi per la derivata di un vettore!!!!

EdiSES

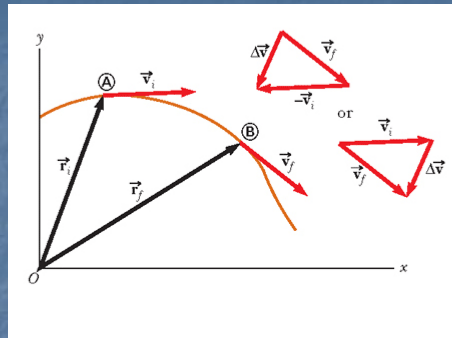
Serway, Jewett – Principi di Fisica, IV Ed. – Capitolo 3

Accelerazione

Consideriamo una particella che si muove su una traiettoria piana e la cui velocità sia $\mathbf{v}_i$ al tempo t_i e $\mathbf{v}_f$ al tempo t_f

$$\vec{a}_{media} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES

Il vettore accelerazione istantanea è la derivata rispetto al tempo del vettore velocità

EdiSES

Serway, Jewett – Principi di Fisica, IV Ed. – Capitolo 3

- Moto in due dimensioni con Accelerazione costante (accelerazione vettorialmente costante)

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

Accelerazione costante → a_x e a_y costanti allora per le componenti di v valgono le formule del moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\begin{cases} v_x = v_{xf} = v_{xi} + a_x t \\ v_y = v_{yf} = v_{yi} + a_y t \end{cases}$$

Sostituendo nella otteniamo

$$\vec{v}_f = v_{xf}\hat{i} + v_{yf}\hat{j} = (v_{xi} + a_x t)\hat{i} + (v_{yi} + a_y t)\hat{j} =$$

$$\underbrace{v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j}}_{\text{Vettore velocità iniziale}} + \underbrace{(a_x\hat{i} + a_y\hat{j})}_{\text{Vettore accelerazione}} t$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\,t$$

Analoga alla seconda formula del moto rettilineo uniformemente accelerato

EdiSES

Per il moto rettilineo uniformente accelerato (lungo l'asse x) vale:

$$x_F = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

e analogamente per un moto rettilineo uniforme lungo l'asse y:

$$y_F = y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Sostituendo nella formula della posizione:

$$\vec{r}_F = x\hat{i} + y\hat{j} = \left(x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2\right)\hat{i} + \left(y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2\right)\hat{j}$$

Raccogliamo le componenti dei vari vettori e otteniamo:

$$(x_i\hat{i} + y_i\hat{j}) + (v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j})t + \frac{1}{2}(a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t^2$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a} t^2$$

Analoga alla terza formula del moto rettilineo uniformemente accelerato

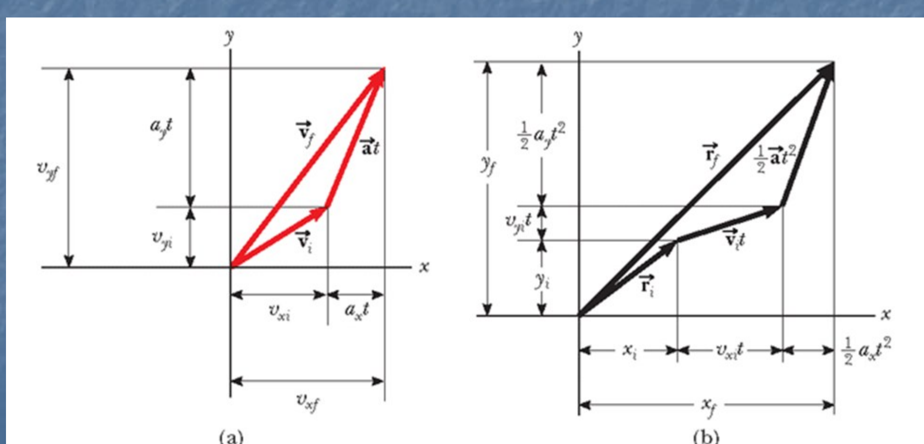
EdiSES

$$\boxed{\vec{v}_F = \vec{v}_i + \vec{a} t}$$

La velocità al tempo t di una particella è la somma vettoriale della sua velocità iniziale più una velocità aggiuntiva (**a**t) dovuta all'accelerazione.

$$\vec{r}_F = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a} t^2$$

La posizione al tempo t di una particella è la somma vettoriale della sua posizione iniziale + uno spostamento $\mathbf{v}_i t$ dovuto alla velocità iniziale + uno spostamento (1/2)**a**t^2 dovuto all'accelerazione.



$$\vec{v}_F = \vec{v}_i + \vec{a}\,t$$

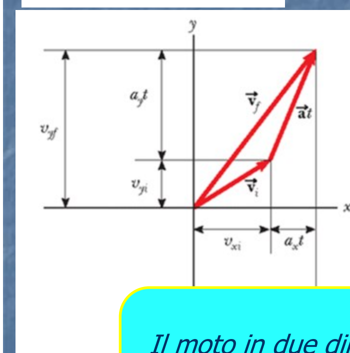
$$v_{xF} = v_{xi} + a_x t$$

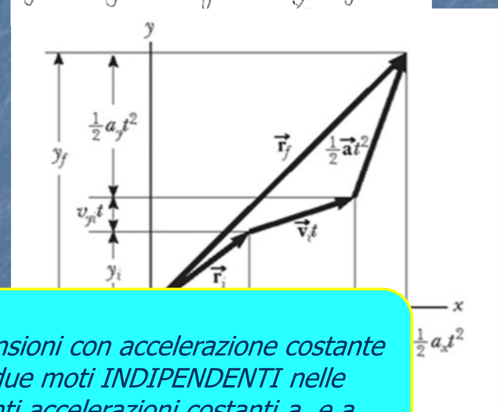
$$v_{yF} = v_{yi} + a_y t$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

$$x_F = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y_F = y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$





Il moto in due dimensioni con accelerazione costante è equivalente a due moti INDIPENDENTI nelle direzioni x e y aventi accelerazioni costanti a_x e a_y.

EdiSES

Serway, Jewett – Principi di Fisica, IV Ed. – Capitolo 3

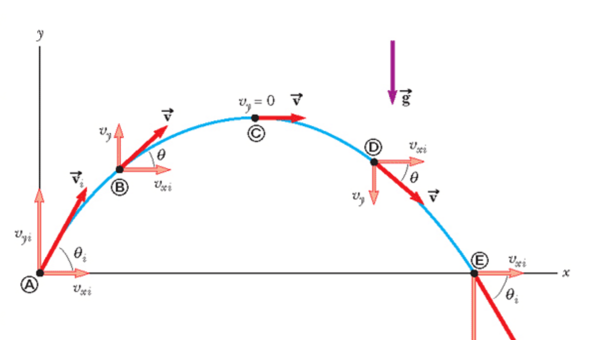
Moto del proiettile

Ipotesi: l'accelerazione di gravità è cost; la resistenza dell'aria può essere trascurata.

Sistema di riferimento con asse y rivolto verso l'alto (allora a=-g).

Sia v_i il modulo della velocità iniziale e θ_i l'angolo di lancio.

FIGURA 3.5 La traiettoria parabolica di un proiettile che parte dall'origine (punto Ⓐ) con velocità $\vec{v}_i$. Il vettore velocità $\vec{v}$ varia nel tempo sia in modulo sia in direzione. La variazione del vettore velocità è dovuta all'accelerazione nella direzione y negativa. La componente x della velocità rimane costante nel tempo perché non vi è accelerazione lungo la direzione orizzontale. Inoltre, la componente y della velocità si annulla nel punto più alto della traiettoria (punto Ⓒ).



EdiSES

$v_{ox}=v_i\cos\theta_i$ $\quad v_{oy}=v_i \mathrm{sen}\,\theta_i$

Il moto in due dimensioni con accelerazione costante è equivalente a due moti INDIPENDENTI nelle direzioni x e y aventi accelerazioni costanti a_x e a_y.
In questo caso $a_x=0$ e $a_y=-g$

$$v_{xF} = v_{xi} = v_i \cos\theta_i = cost$$
$$v_{yF} = v_{yi} - g t$$

$$x_F = x_i + v_{xi} t = (v_i \cos\theta_i) t$$
$$y_F = y_i + v_{yi} t - \frac{1}{2} g t^2 = (v_i \,\mathrm{sen}\,\theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Lungo l'asse x, moto rettilineo uniforme.
Lungo l'asse y, moto rettilineo uniformemente accelerato con a=-g (caduta libera).

EdiSES

Serway, Jewett – Principi di Fisica, IV Ed. – Capitolo 3

$$t = \frac{x_F}{v_i \cos\theta_i}$$

Valida per cosθ≠0

$$y_F = \cancel{y_i} + \frac{v_i \,\mathrm{sen}\,\theta_i}{v_i \cos\theta_i} x_F - \frac{1}{2} g \frac{x_F^2}{v_i^2 \cos^2\theta_i}$$

$y_F =$ [redacted] $\mathrm{tg}\,\theta_i \, x_F - \left(\frac{1}{2} \frac{g}{v_i^2 \cos^2\theta_i}\right) x_F^2$

Equazione del tipo:
y= ax-bx²

Traiettoria è una parabola,
completamente specificata se sono noti
la velocità iniziale e l'angolo di lancio.

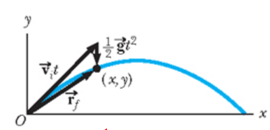


FIGURA 3.6 Il vettore posizione $\vec{r}_f$ di un proiettile la cui velocità iniziale all'origine è $\vec{v}_i$. Il vettore $\vec{v}_i t$ sarebbe il vettore posizione del proiettile se non ci fosse la gravità. A questa è sommato il vettore $\frac{1}{2}\vec{g}t^2$ dovuto all'accelerazione di gravità del proiettile rivolta verso il basso.

EdiSES Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES

Riprendiamo l'equazione vettoriale per il moto uniform. acc

$$\vec{r}_F = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$\vec{r}_F = \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

EdiSES

Gittata e altezza max:

Altezza max determinata da $v_y=0$

$$t = \frac{v_i \,\mathrm{sen}\,\theta_i}{g}$$

Sostituiamo nella:

$$y_f = y_i + v_{yi}\, t - \frac{1}{2} g t^2 =$$

Ottenendo

$$h = (v_i \,\mathrm{sen}\,\theta_i)\frac{v_i \,\mathrm{sen}\,\theta_i}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i \,\mathrm{sen}\,\theta_i}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \,\mathrm{sen}^2\,\theta_i}{2g}$$

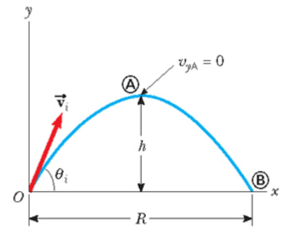


FIGURA 3.7 Un proiettile lanciato dall'origine con velocità iniziale $\vec{v}_i$, al tempo $t = 0$. La massima altezza del proiettile è h e la sua gittata è R. In Ⓐ, il punto più alto della traiettoria, il proiettile ha $(R/2, h)$.

Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES

$$h = \frac{v_i^2 \,\mathrm{sen}^2\,\theta_i}{2g}$$

Altezza massima

Se t* è il tempo necessario a raggiungere l'altezza massima, 2t* è il tempo necessario a tornare a terra. Gittata è determinata scrivendo la posizione lungo l'asse x al tempo 2t*.

$$R = v_i \cos\theta_i \,(2t) = v_i \cos\theta_i \,\frac{2 v_i \,\mathrm{sen}\,\theta_i}{g}$$

$$R = \frac{v_i^2 \,\mathrm{sen}\, 2\theta_i}{g}$$

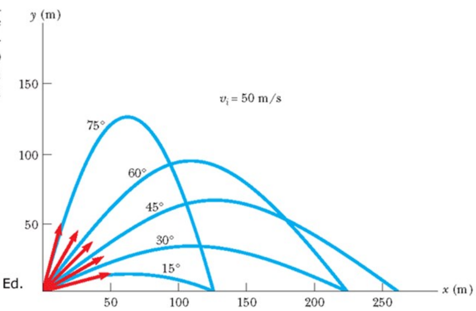
Avendo usato: $\mathrm{sen}2\theta=2\mathrm{sen}\theta\cos\theta$

$$R = \frac{v_i^2 \, sen\, 2\theta_i}{g}$$

Come possiamo aumentare la gittata?

1) Andare sulla luna.
2) Aumentare v_0.
3) Giocare sull'angolo: R max per $2\theta=90°$
4) La stessa gittata si può raggiungere con due valori complementari di θi, esempio 15° e 75° (sen30°=sen150°).

FIGURA 3.8 Un proiettile lanciato dall'origine con un modulo della velocità iniziale di 50 m/s a vari angoli di lancio. Si noti che per valori complementari di θ_i i otterrà lo stesso valore di R.



Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES

Serway, Jewett – Principi di Fisica, IV Ed. – Capitolo 3

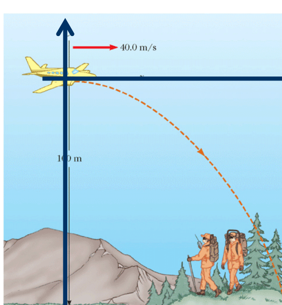


FIGURA 3.10 (Esempio 3.3) Un pacco viveri di emergenza è lanciato da un aereo ad esploratori in difficoltà.

Esempio 3.3 Un aereo lancia un pacco di viveri di emergenza ad un gruppo di esploratori in difficoltà. L'aereo vola orizzontale a 40 m/s e ad un'altezza di 100 m. In che punto raggiungerà il suolo rispetto a dove è lasciato cadere?

Lungo x: moto rettilineo uniforme

Lungo y: moto rettilineo uniformemente accelerato

$Y_0=100$	$X_0=0$
$Y=0$	$X=?$
$V_{oy}=0$	$V_{x0}=40$ m/s

$$x = x_0 + v_{0x} t$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$-100 = 0 - \frac{1}{2} 9.8 t^2$$

$$t^* = \sqrt{\frac{200}{9.8}} = 4.52 s$$

$$x = 0 + 40 \cdot \frac{m}{s} \cdot 4.52 s = 181 m$$

Serway, Jewett – Principi di Fisica, IV Ed. – Capitolo 3

Particella in moto circolare uniforme:
Moto su una traiettoria circolare con modulo v costante. Vettorialmente V cambia direzione istante per istante.

Calcoliamo $\Delta v = (v_f - v_i)/(\Delta t)$ Accelerazione centripeta costante in modulo

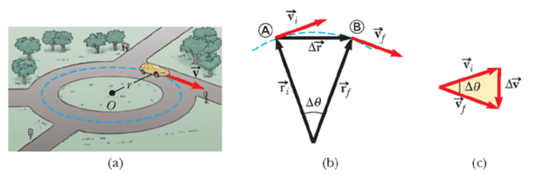


FIGURA 3.11 (a) Una macchina che si muove lungo un percorso circolare a velocità costante è in moto circolare uniforme. (b) Quando la particella si muove da Ⓐ a Ⓑ, il suo vettore velocità varia da $\vec{v}_i$ a $\vec{v}_f$. (c) La costruzione per determinare la direzione orientata della variazione di velocità $\Delta\vec{v}$, che è diretta, per piccoli $\Delta\theta$, verso il centro della circonferenza.

L'accelerazione è in direzione perpendicolare alla traiettoria.

L'angolo tra i due vettori posizione e l'angolo tra i due vettori velocità è lo stesso. I due triangoli sono simili (due triangoli isosceli con angolo al vertice uguale).

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r} \qquad |\Delta\vec{v}| = \frac{v}{r}|\Delta\vec{r}|$$

Serway, Jewett – Principi di Fisica, IV Ed. – Capitolo 3

$$|\vec{a}_{medio}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} |\vec{a}_{medio}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

$$\mathbf{a_c = v^2/r} \qquad \mathbf{T = 2\pi r/v}$$

ESEMPIO 3.5: Quale è l'accelerazione centripeta della terra dovuta al suo moto orbitale intorno al sole? (ipotesi orbita circolare).

$a_c = (v^2/r) = [(2\pi r/T)^2/r] = 4\pi^2 r/T^2 = 4\pi^2(1.5 \times 10^{11}\ m)/(1\ anno)^2 =$
$5.9 \times 10^{-3}\ m/s^2 = 6.0 \times 10^{-4}\ g$

Velocità relativa

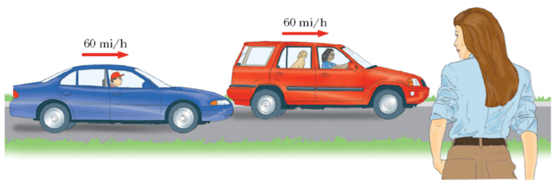
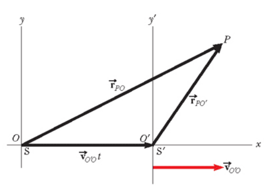


FIGURA 3.13 Due osservatori misurano la velocità della macchina rossa. L'osservatore O sta a terra a lato dell'autostrada. L'osservatore O' i trova nella macchina blu..

EdiSES Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES

Serway, Jewett – Principi di Fisica, IV Ed. – Capitolo 3

FIGURA 3.14 I vettori posizione per due osservatori di un evento che accade nel punto P. L'osservatore O' si muove verso destra alla velocità $v_{O'O}$ rispetto all'osservatore O.



EdiSES Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES

$$\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{PO'} + \vec{v}_{O'O}\, t$$

$$\frac{d(\vec{r}_{PO})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{PO'} + \vec{v}_{O'O}\, t\right) = \frac{d\vec{r}_{PO'}}{dt} + \vec{v}_{OO'}$$

$$\vec{v}_{PO} = \vec{v}_{PO'} + \vec{v}_{O'O}$$

Nel caso unidimensionale:

$$v_{PO} = v_{PO'} + v_{O'O}$$

Velocità relativa, ovvero la velocità misurata da un osservatore in moto

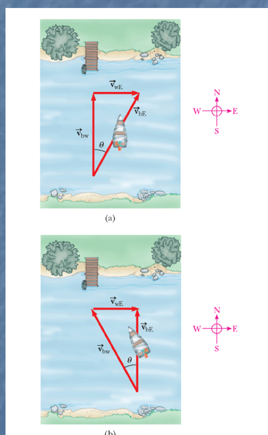
$$v_{PO'} = v_{PO} - v_{O'O}$$

$$\frac{d\vec{v}_{PO}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{PO'}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{OO'}}{dt}$$

$$\vec{a}_{PO} = \vec{a}_{PO'} + 0$$

L'accelerazione di un corpo misurata da un osservatore in un sistema di riferimento avrà lo stesso valore di quella misurata da un qualunque altro osservatore che si muova con velocità costante rispetto al primo

Serway, Jewett – Principi di Fisica, IV Ed. – Capitolo 3



Una barca che volge la prua esattamente a nord attraversa un largo fiume con una velocità di 10.0 km/h rispetto all'acqua. Il fiume ha una corrente tale per cui l'acqua si muove con velocità uniforme di 5 km/h rispetto alla sponda verso est. Quale è la velocità della barca rispetto ad un osservatore fermo a terra sulla sponda del fiume?

Un osservatore E è fermo rispetto alla terra. Un osservatore w è in moto con l'acqua.

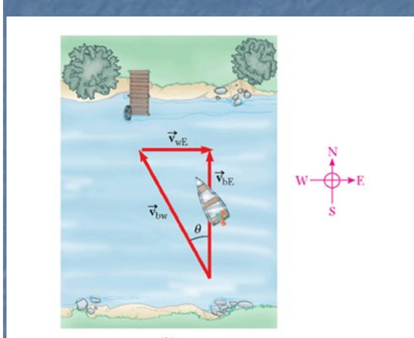
$$\vec{V}_{BE} = \vec{v}_{Bw} + \vec{v}_{wE} \qquad 10\hat{j} + 5\hat{i} \ \ km/h$$

$$|v_{BE}| = \sqrt{v_{Bw}^2 + v_{wE}^2} = \sqrt{10^2+5^2} = 11.2\ km/h$$

$$tg\,\theta = \frac{v_{wE}}{v_{bw}} \qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{5}{10}\right) = 26°$$

Serway, Jewett – Principi di Fisica, IV Ed. – Capitolo 3

A che angolo la barca dovrebbe porre la prua se volesse attraversare il fiume direttamente verso NORD e quale sarebbe la sua velocità rispetto alla terra?



Vogliamo che la V_{bE} sia verso NORD, allora

$$v_{wE} = v_{Bw}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{v_{wE}}{v_{Bw}} = \frac{5}{10}$$

$$\theta = 30°$$

La barca deve inclinare la prua di 30° rispetto alla direzione NORD.

La velocità della barca relativamente alla terra è:

$$v_{BE} = \sqrt{v_{Bw}^2 - v_{wE}^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8.66\ \frac{km}{h}$$

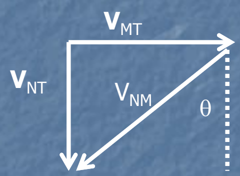
Serway, Jewett – Principi di Fisica, IV Ed. – Capitolo 3

Perché quando siamo in movimento vediamo la pioggia o la neve cadere non in verticale?

La neve sta cadendo verticalmente alla velocità di 8 m/s. A quale angolo rispetto alla verticale sembrano cadere i fiocchi per il guidatore di un'auto che viaggia a 50 Km/h?

$\mathbf{v}_{NT}=\mathbf{v}_{NM}+\mathbf{v}_{MT}$ $\mathbf{v}_{NM}=\mathbf{v}_{NT}-\mathbf{v}_{MT}$

50 km/h=13.9 m/s



$$|v_{NM}| = \sqrt{8^2+(13.9)^2} = 16 \text{ m/s}$$

$$13.9 = 16 \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = 0.86 \qquad \theta = 60^\circ$$

EdiSES