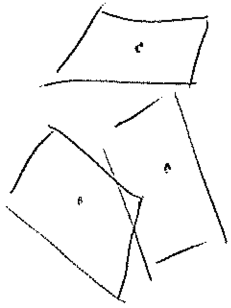
Integrabilità di una distribuzione di piani in $\mathbb{R}^3$. Approccio tramite le forme differenziali

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. M. Spera, a.a. 2009/10

Lezione XXIX

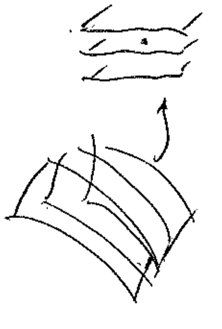
Una distribuzione di piani in $\mathbb{R}^3$ è fornita dal nucleo di una 1-forma θ



$$\theta = 0$$

$$\theta_1\, dx + \theta_2\, dy + \theta_3\, dz = 0$$

In virtù del teorema di Frobenius, la distribuzione data è integrabile $\iff$ esistono, in un intorno di un pto qualsiasi, coordinate locali (ξ, η, ζ) tali che



la varietà integrale passante per ognuno dei pti dell'intorno abbiamo la forma $\zeta = c$. In altre parole

$$\theta = 0 \quad \rightsquigarrow \quad f(\xi,\eta,\zeta)\, d\zeta = 0$$

per qualche f

Si osservi che, dato che $d\theta = \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi \wedge d\zeta + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta \wedge d\zeta$,

si ha allora

$$\theta \wedge d\theta = f\, d\zeta \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi \wedge d\zeta + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta \wedge d\zeta \right)$$

$$= \dots = 0$$

$$\boxed{\theta \wedge d\theta = 0}$$

è intrinseca

Tale condizione è necessaria (visto), e sufficiente

teorema di Frobenius, altra versione

pertanto, tornando alle coordinate (x, y, z),

si ha

$$(\theta_1\, dx + \theta_2\, dy + \theta_3\, dz) \wedge$$

$$\left[\left(\frac{\partial \theta_3}{\partial y} - \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right] = 0$$

ovvero ...

$$\theta_1 \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial y} - \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) + \theta_2 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right) + \theta_3 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) = 0$$

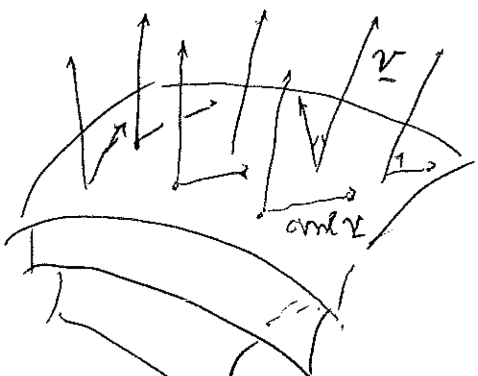
in notazione tradizionale (analisi vettoriale)

se $\theta \leadsto \underline{v}$

è $\boxed{\underline{v} \cdot \mathrm{curl}\, \underline{v} = 0}$ velocità $\perp$ vorticità

Ad esempio, è la condizione di <u>laminarità</u> di un fluido

(il fluido avanza per "fronti")



Esempi / commenti

in $\mathbb{R}^2$ (e in $\mathbb{R}^3$) ogni distribuzione unidimensionale è integrabile

i.e. campo di direzioni

(teorema di Cauchy)

vedi oltre

es:

$$\theta = \underset{\substack{\text{energia}\\ \text{interna}}}{dU} + \underset{\text{pressione}}{p}\, d\underset{\text{volume}}{V} \quad (\equiv \underset{\text{calore scambiato}}{\delta Q})$$

$$d\theta = dp \wedge dV$$

e ovviamente $\underbrace{\theta \wedge d\theta}_{3\text{ forma}} = 0$

nel piano, per fissare le idee

teoria di Eulero dei fattori integranti

$$w = P\,dx + Q\,dy = 0$$

$$(\mu P)\,dx + (\mu Q)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = 0$$

(=> la forma è esatta => $w = df$)

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} P - \mu \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial y} P - \frac{\partial \mu}{\partial x} Q$$

v. Corso di Analisi I

$$d\omega = (-P_y + Q_x)\,dx \wedge dy$$

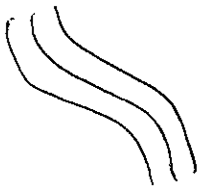
$$\omega \wedge d\omega = \dots = 0 \quad \text{immediato}$$

L'eq. $dU + p\,dV = 0$ è integrabile

è $dU + p\,dV = \underset{\text{temperatura}}{T}\, d\underset{\text{entropia}}{S}$

$$dS = \frac{1}{T}\,dU + \frac{p}{T}\,dV$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U}, \qquad \frac{p}{T} = \frac{\partial S}{\partial V}$$



$$S = S(U,V) = c$$

"disposizione termodinamica"

XXIX. - 3'

* Esempio: sia $\omega = x\,dy + dz$

nucleo: $(x\,dy + dz)\left[\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}\right] = 0$

$x\,dy + dz = 0$

$dz = -x\,dy$
$dx = dx$
$dy = dy$

$x\beta + \gamma = 0$

$\gamma = -\beta x$

$\rightsquigarrow$ Distribuzione: $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$ base locale

Calcoliamo invece

$\omega \wedge d\omega$

$d\omega = dx \wedge dy$

$\omega \wedge d\omega = (x\,dy + dz) \wedge dx \wedge dy$

$= dz \wedge dx \wedge dy$

$= dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$

Notare anche qui la potenza del Calcolo di Cartan

verifichiamo se è involutoria col teorema di Frobenius

Ma $\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}\right]$

$= \left[\frac{\partial}{\partial x}, -x\frac{\partial}{\partial z}\right]$

$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-x\frac{\partial}{\partial z}\right) + x\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}$

$= -\frac{\partial}{\partial z} \cancel{- x\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}} \cancel{+ x\frac{\partial^2}{\partial z \partial x}}$

$= -\frac{\partial}{\partial z}$

che non è c.l. (con coeff. funzioni) di $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}$

☆☆ Teorema di Frobenius per le forme

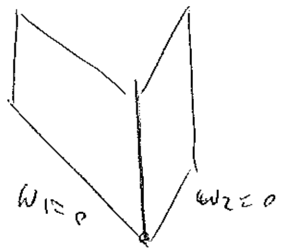
Esempio di

☆ Sistema di Pfaff

$$\begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \vdots \\ \omega_k = 0 \end{cases}$$

ω_i : 1-forme su M, $\dim M = n$

La distribuzione di dim $n-k$ individuata dall'intersezione dei nuclei delle ω_i è integrabile



se e solo se

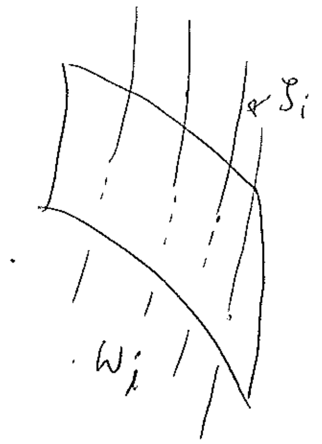
$$d\omega_j \wedge \omega_1 \wedge \dots \omega_k = 0$$

$$j = 1, 2, \dots k$$

in particolare, se $\dim M = 3$ $\omega = 0$ integrabile

$\iff$ $\omega \wedge d\omega = 0$

vediamo, in sintesi, la necessità della condizione



$\omega_i = f_i \, d\zeta_i$ $\quad d\omega_i = df_i \wedge d\zeta_i$

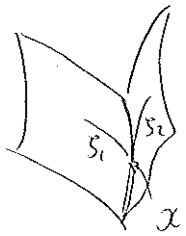
coord. locali: $x_1 \dots x_{n-k}, \zeta_1 \dots \zeta_k$

$\Downarrow$

descrivono la varietà integrale

ex: $(x \, \zeta_1 \, \zeta_2)$

$$d\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_k = \underbrace{df_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \left(\prod f_i \, d\zeta_1 \wedge \dots d\zeta_k\right)}_{\substack{\| \\ 0}}$$

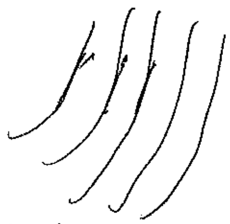


e lo stesso accade in generale

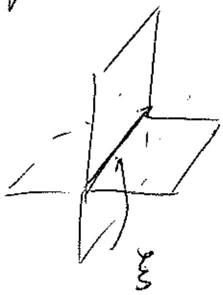
esempio

✱ vediamo più in dettaglio come una distribuzione **unidimensionale** in $\mathbb{R}^3$

(campo di direzioni)



risulti c. integrabile (è un controllo: il teor. di Cauchy è il pto di partenza della teoria...)



localmente:

$$\omega_1 = f(\xi,\eta,\zeta)\, d\eta$$

$$\omega_2 = g(\xi,\eta,\zeta)\, d\zeta$$

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = f \cdot g\; d\eta \wedge d\zeta$$

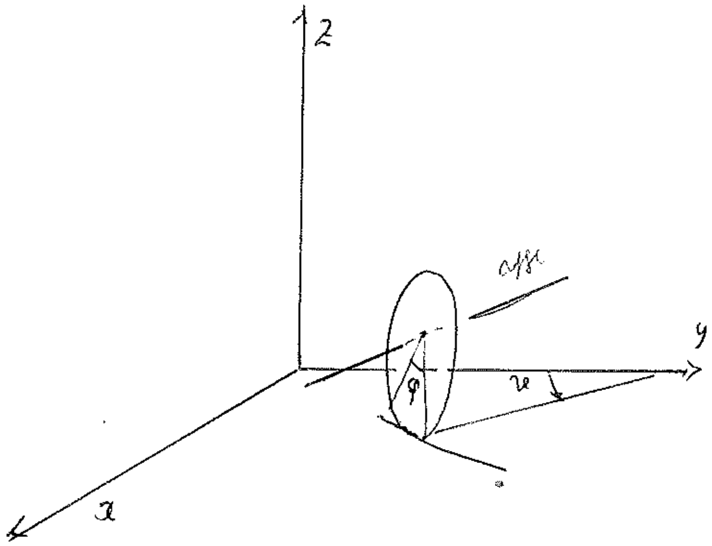
$$d\omega_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi}\, d\xi \wedge d\eta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\, d\zeta \wedge d\eta$$

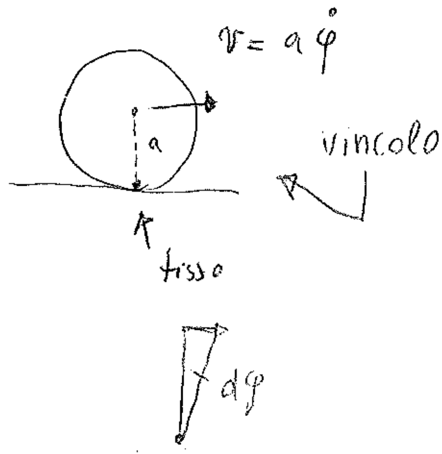
$$d\omega_2 = \frac{\partial g}{\partial \xi}\, d\xi \wedge d\zeta + \frac{\partial g}{\partial \eta}\, d\eta \wedge d\zeta$$

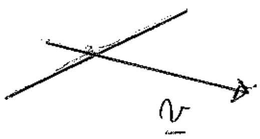
$$d\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = \ldots = 0$$

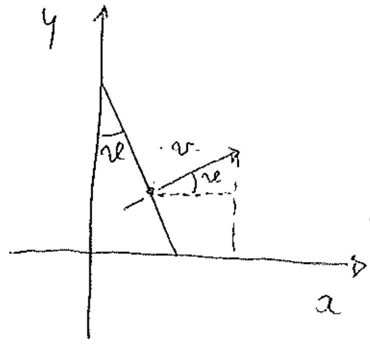
$$d\omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = \ldots = 0$$

4 Esempio meccanico : disco verticale che rotola su un piano senza strisciare









$$\dot x = v\cos\vartheta = a\cos\vartheta\,\dot\varphi$$
$$\dot y = v\sin\vartheta = a\sin\vartheta\,\dot\varphi$$

$$\begin{cases} \overbrace{dx - a\cos\vartheta\, d\varphi}^{\omega_1} = 0 \\ \underbrace{dy - a\sin\vartheta\, d\varphi}_{\omega_2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = 0 \end{cases}$$

sistema di Pfaff.

$$d\omega_1 = +a\sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi$$
$$d\omega_2 = -a\cos\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi$$

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = dx \wedge dy - a\cos\vartheta\, d\varphi \wedge dy - a\sin\vartheta\, dx \wedge d\varphi$$

$$d\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = a \sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi \wedge dx \wedge dy \neq 0$$

$$d\omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = -a\cos\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi \wedge dx \wedge dy \neq 0$$

★ Il vincolo è anolonomo (non integrabile)

◈ Verso il teorema della varietà quoziente ...

★ Sulla condizione di Hausdorff

X, spazio topologico, è di Hausdorff $\iff$

$$\underset{\text{diagonale}}{\Delta} = \{ (x,x) \mid x \in X \} \subset X \times X$$

è chiusa [nella topologia prodotto su $X \times X$]

($\Rightarrow$) Mostriamo che $X \setminus \Delta$ è aperto.

Sia $(x,y) \in X \setminus \Delta$: è $x \neq y$.

Siano $U \ni x$, $\bar{V} \ni y$ intorni disgiunti di x e y $(U \cap V = \phi)$. Ma allora essi non possono contenere elementi di Δ: se $(\tilde{x}, \tilde{x}) \in \Delta$, $\tilde{x} \in \bar{U} \cap \bar{V} = \phi$, assurdo. $U \times \bar{V}$ è allora un intorno di (x,y) contenuto in $X \setminus \Delta$, che pertanto è aperto.

($\Leftarrow$) $X \setminus \Delta$ è aperto. Dato dunque $(x,y) \in X \setminus \Delta$ (i.e. $x \neq y$) $\exists$ $X \setminus \Delta \supset U \times \bar{V} \ni (x,y)$ e dunque è $U \cap \bar{V} = \phi$ $\Rightarrow$ X è Hausdorff.

Più in generale

Teorema: le seguenti condizioni sono equivalenti

(i) X è Hausdorff

(ii) i limiti sono unici
[nessuna rete o filtro converge a più di un limite] [per spazi metrizzabili, quali sono le varietà, ciò equivale a dire che una successione non può avere più di un limite]

(iii) $\Delta = \{(x,x) / x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$

Dim.

(i) => (ii) (con i filtri) se X è T_2 e $\mathcal{Y}$ è un filtro su X

[$\mathcal{Y}$ = famiglia di sottoinsiemi non vuoti t. ch. $A \in \mathcal{Y}$, $B \in \mathcal{Y} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{Y}$
filtro e se $F \in \mathcal{Y}$ e $F \subset F'$, allora $F' \in \mathcal{Y}$]

sia $\mathcal{Y} \to x$ e $\mathcal{Y} \to y$ ma allora $U \ni x$, $V \ni y$ intorni sono tali che $U \in \mathcal{Y}$, $V \in \mathcal{Y}$

$(\mathcal{U}_x \subset \mathcal{Y})$ filtro degli intorni

$\Rightarrow U \cap V \in \mathcal{Y} \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$

assurdo per la cond. T_2.

(ii) => (iii) (con le reti). Se Δ non è chiusa,

$\exists \ (x_\lambda, x_\lambda) \to (x,y)$ per qualche $x \neq y$.

$\Rightarrow x_\lambda \to x$, $x_\lambda \to y$ (assurdo)

$(\forall\, U \ni x \ \exists\, \lambda_0 \in \Lambda$ t. che $\lambda \succeq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in U)$

direzione non è nec. un ordine

rete: $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
Λ insieme diretto
$(\lambda \mapsto x_\lambda \in X$

(iii) => (i) se Δ è chiusa, $X \setminus \Delta$ è aperto
$\Rightarrow$ se $(x,y) \notin \Delta$, $\exists\ U \times V \ni (x,y)$ contenuto in $X \setminus \Delta$
$\Rightarrow U \cap V = \emptyset$.

☆ Una relazione di equivalenza $\sim$ su X, sp. topologico, è detta *aperta* se

$$\pi : X \to X/\sim \quad \text{è aperta}$$

ovvero, $X \supseteq A$ aperto $\Rightarrow$ $\pi(A)$ aperto in $X/\sim$

Si vede facilmente che se X è a base numerabile e π è aperta, anche $X/\sim$ è a base numerabile

[Cenno: $\mathcal{B}$ base numerabile. $B \in \mathcal{B} \Rightarrow \pi(B)$ aperto: i $\pi(B)$ costituiscono la base richiesta: Sia $W \subset X/\sim$ aperto. $\pi^{-1}(W)$ è aperto in X, sicché $\pi^{-1}(W) = \bigcup_{i \in \mathcal{Y}} U_i$, $U_i \in \mathcal{B}$. Ma ($\mathcal{Y}$ numerabile)

$$W = \pi(\pi^{-1}(W)) = \bigcup_{i \in \mathcal{Y}} \pi(U_i)$$ e si conclude.]

– – – – –

☆ Sia G agente su X tramite omeomorfismi:

$$G \subset \mathrm{Omeo}(X) \quad g : x \longmapsto g(x) \equiv g \cdot x$$

Sia $\boxed{X/G \equiv \text{spazio delle } G\text{-orbite} \quad (\text{con la top. quoziente})}$

☆ G-orbita di $x \in X$: $\{ y \in X : y = g \cdot x \text{ per qualche } g \in G \}$

$$\equiv \{ gx \,/\, g \in G \} .$$

☆ $\pi : X \to X/G$ è aperta: Sia infatti $A \subset X$ aperto. Si ha:

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup \{ g \cdot A \,/\, g \in G \} = \bigcup_{g \in G} \underbrace{g \cdot A}_{\text{aperto}} \Rightarrow \underset{\text{aperto}}{\pi^{-1}(\pi(A))}$$

Ma allora, per definizione di topologia quoziente, $\pi(A)$ è aperto. □