Lezione XVIII

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE Prof. M. Spera

a.a. 2009/10

Commutatore di due campi vettoriali (parentesi di Lie)
(Lie bracket)

M varietà
X, Y campi vett.

$$\boxed{[X,Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))}$$

$f \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$[X,Y]$ è ancora un campo vettoriale!

Infatti $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

(si può lavorare localmente) $\Rightarrow$

$$X(Y(f)) = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \sum_{i,j} a_i \left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

$$= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Analogamente:

$$Y(X(f)) = \sum b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + b_i a_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$\Rightarrow$

$$[X, Y] = \sum_j \underbrace{\left(\sum a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right)}_{c_j} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$\mathfrak{X}(M)$: campi vettoriali ☆

costituiscono un'algebra di Lie : $(L, [\ ])$ sp. vettoriale

$[\ ]$ bilineare, antisimmetrica, Jacobi : $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

☆ $\mathfrak{X}(M)$ ha dimensione infinita

vedi poco oltre per ulteriori esempi di algebre di Lie

Ancora : ☆ $\boxed{\mathfrak{X}(M) \text{ è un } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-modulo}}$ ☆

ovvero $V \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow fV \in \mathfrak{X}(M)$

$$(fV)(g)(x) = f(x) \cdot [V(x)(g)](x)$$

prodotto puntuale

Ciò è vero, più in generale, per le sezioni dei fibrati vettoriali ... vedi oltre

Inciso - richiamo

A anello $(A, +, \circ)$ gruppo abeliano
(risp. a +) $\circ$ moltiplicazione associativa
$+$ e $\circ$ sono intercalate dalle proprietà distributive

$$a(b+c) = ab + bc$$
$$(b+c)a = ba + ca$$

M gruppo abeliano

A - modulo : è un gruppo abeliano M su cui A agisce "linearmente"; precisamente

$$(M, \mu) \qquad \mu : A \times M \longrightarrow M$$
$$(a, x) \longmapsto \mu(a, x) \equiv ax$$

con
$$a(x+y) = ax + by$$
$$(a+b)x = ax + bx$$
$$(ab)x = a(bx)$$
$$1 \cdot x = x$$

spazio vettoriale $\equiv$ K - modulo , K campo

INCISO

★ algebra di Lie (su $\mathbb{R}$)

Un algebra di Lie $(L, [\,,\,])$ è uno spazio vettoriale L su $\mathbb{R}$ munito di un'applicazione

$$[\,,\,] \quad L \times L \longrightarrow L$$
$$(X, Y) \longmapsto [X,Y]$$

Lie bracket (parentesi di Lie)

tale che

- $[\,,\,]$ è bilineare
- $[\,,\,]$ antisimmetrica $[Y,X] = -[X,Y] \quad \forall X,Y \in L$
- vale l'identità di Jacobi $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z[X,Y]] = 0$

Esempi

$M_n(\mathbb{R}) \qquad [A,B] = AB - BA$

commutatore

$\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ = matrici antisimmetriche..

$(\mathbb{R}^3, \times)$

prodotto vettoriale $\left(\underset{\text{come algebra di Lie}}{\cong} \mathfrak{so}(3) \right)$

$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ campi vettoriali $X = \sum a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

$$\overset{\cap}{\mathcal{C}^\infty} \qquad \underset{\underset{\sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j}}{\parallel}}{[X,Y]} = \sum_j \underbrace{\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right)}_{c_j} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

v. pagine precedenti

Su $\mathbb{R}^{2n} = \underset{q}{\mathbb{R}^n} \times \underset{p}{\mathbb{R}^n}$ $\quad q = (q_1 \dots q_n)$

$p = (p_1 \dots p_n)$

$$\{f, g\}(q, p) := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

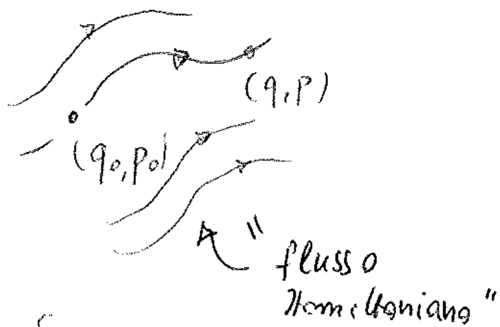
Parentesi di Poisson fondamentali in Meccanica Analitica

[Hanno senso in geometria simplettica]

Inoltre $\underset{q}{\mathbb{R}^n} \times \underset{p}{\mathbb{R}^n}$ spazio delle fasi in meccanica classica

sp. delle configurazioni

sp. momenti (velocità generalizzate)



Newton

$\ddot{x} = \frac{F}{m}$ il moto è individuato fissando $x(0)$ e $\dot{x}(0)$

$\dot{x} = y$

$\ddot{x} = \dot{y}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{F}{m} \end{cases}$$

Equazioni di Hamilton

(le riprenderemo nell'ambito della geometria simplettica)

1- forma differenziale (liscia)

$$w : X \to T^* X$$

$$\pi \circ w = i_X$$

proiezione

Si chiede poi che $\forall$ V campo vettoriale liscio

risulti

$$\omega(V) \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$$

ove $\boxed{\omega(V)(x) := \langle \omega(x), V(x) \rangle}$

dualità

localmente

$$w = \sum w_i \, dx_i$$

f. lisce

Si costruiscono $\Lambda^k(X)$: k- forme (differenziali) su X

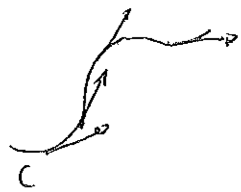
$\equiv$ sezioni di $\Lambda^k(T^*X)$ = " k- prodotto tensoriale antisimmetrico di T^*M "

loc: $x \to \omega(x)$ k- forma liscia su $\mathbb{R}^n$

Flussi di campi vettoriali $\quad X \in \mathfrak{X}(M)$

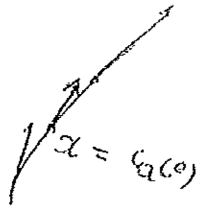
$$\dot c(t) := X(c(t)) \quad \text{su } M$$
$$(X \circ c)(t)$$

$$c : I \subset \mathbb{R} \to M$$



$\forall x \in M \ \exists\, I_x \ni 0$ ed una unica $c_x : I_x \to M$

tale che $\dot c_x(t) = X(c_x(t))$ $\quad c_x(0) = x$



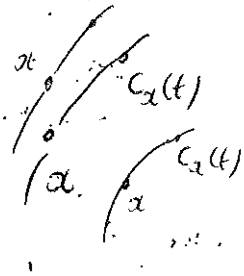
[esistenza e unicità per eq. diff. 1° ordine] + dipendenza liscia dalle condizioni iniziali

$\forall m \in M \ \exists\, V \ni m$, $I \ni 0$ tale che $\forall x \in V$,

c_x è def. in I e $\underbrace{(t, x) \longmapsto c_x(t)}$ è liscia

flusso locale di X

$$x \to \theta_t \cdot x = c_x(t)$$



Si ha (se i due membri sono definiti)

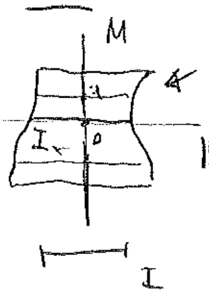
$$\boxed{\theta_t \circ \theta_{t'} = \theta_{t+t'}}$$

θ_t : diffeomorfismi locali

Dim $\quad c_x(t_1 + t_2)$: sol con $c_x(0) = x$ in $t_1 + t_2$

ma anche valore in t_1 della sol $= c_x(t_2)$ in 0

||| gruppo locale a un par. di diffeomorfismi locali

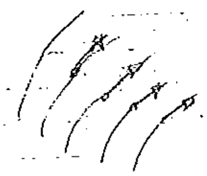


dominio di un flusso

☆ <u>Campi vettoriali</u> ≡ <u>generatori dei gruppi</u> (locali) a <u>un parametro</u> di <u>diffeomorfismi</u> (locali)

$s, t \in \mathbb{R}$ (opp. $\in I$ ..)

$$g_t\, g_s = g_{t+s} \qquad g_t : M \to M \text{ diffeom.}$$



$$g_0 = id$$

È il <u>teorema di esistenza e unicità di Cauchy-Lipschitz sulle variabili</u>
(<u>campo ↦ gruppo</u>)

$\dot{g}(t,x) \equiv \dot{g}_t(x)$

x

$$g_t(x) \equiv g(t,x) \in X$$

$$\underset{I\times X}{(t,x)} \longmapsto \underset{X}{g(t,x)} = g_t(x)$$

$$g : I\times M \to M \quad \text{liscia}$$

(<u>azione</u> di I su M)

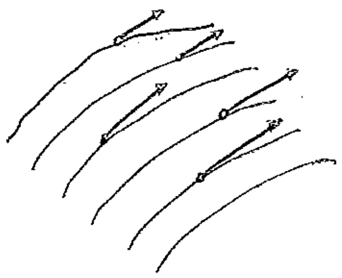
☆ Se M è <u>compatta</u> si può sempre (†) prendere $I = \mathbb{R}$ (†) vedi oltre

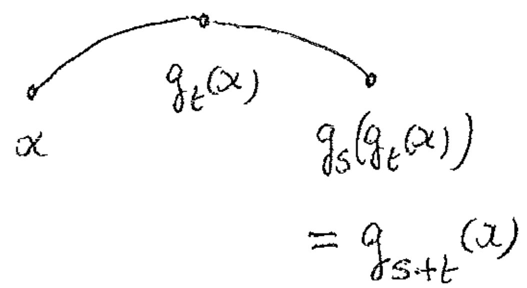
<u>Dal gruppo al campo</u>: se f è def. in un intorno di x, si pone

$$(\nabla f)(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(g_t(x)) - f(x)}{t}$$

$$= \frac{d}{dt} F(t) \Big|_{t=0} \qquad \text{con} \quad (x \text{ fisso})$$

$$F(t) := f(g_t(x))$$
$$= (f \circ g_t)(x)$$
$$(F(0) = f(x))$$





★ Esempi di flussi

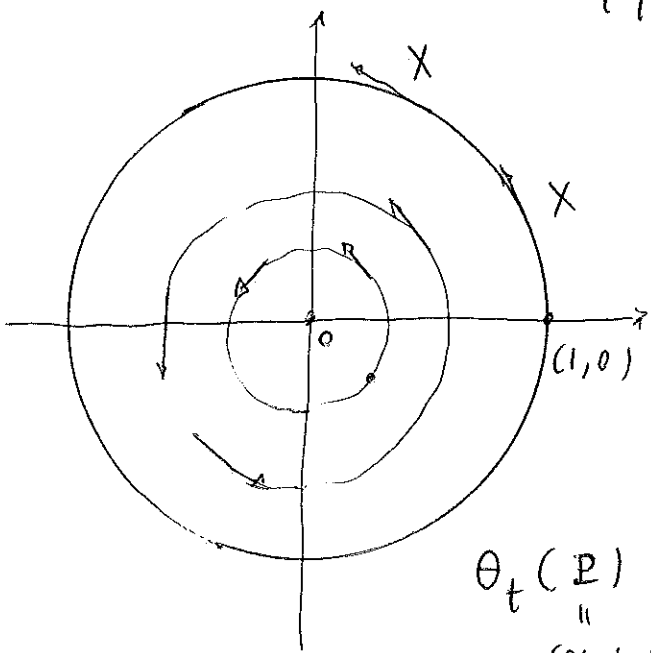
$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

o $\mathbb{R}^2$

0 : pto critico di X

$$X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$



$\ddot{x} = -\dot{y} = -x$

$\ddot{x} + x = 0$

se $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ (x_0,y_0)}}{\theta_t(P)} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$\parallel$

R_t

rotazione di $\varphi = t$ attorno ad 0

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \underset{P}{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$$

θ_t : globale

viceversa:

$$\theta_* = \frac{d}{dt}\theta_t\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in ogni pto del piano "bucato"

$$T_pM \ni \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \overset{\theta_*}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta \\ \xi \end{pmatrix}$$

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{su } \mathbb{R}$$

$$\dot{x} = x^2 \qquad \frac{dx}{x^2} = dt \qquad (x \neq 0)$$

$$-\frac{1}{x} = t + c$$

$$x = -\frac{1}{t+c} \qquad t \neq -c$$

il flusso di X è solo <u>locale</u>

$$x(0) = -\frac{1}{c}$$

$$t + c > 0$$