EX 1. Data $f(x,y) = x^2+y^2-2x+1$

a) studiarne la concavità/convessità e calcolare gli eventuali max/min liberi

b) definire una funzione concava

c) enunciare le condizioni sufficienti sulle f.q. che garantiscono la stretta concavità della funzione.

Ris

$A = \mathbb{R}^2$

$f \in C^\infty(A)$

$f_x(x,y) = 2x-2$ $\quad$ $f_y(x,y) = 2y$

$f_{xx}(x,y) = 2$ $\quad$ $f_{yy}(x,y) = 2$ $\quad$ $f_{xy}(x,y) = 0$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$M_1 = 2 = a_{11} > 0$

$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 = \det H(x,y) > 0$

$\Rightarrow H(x,y)$ è definita positiva

$\Rightarrow f(x,y)$ è strettamente convessa

Ricordo che se f è strettamente convessa e differenziabile in A aperto convesso $\Rightarrow$ ha al più un punto critico che, se $\exists$, è di minimo assoluto

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x-2=0 \\ f_y(x,y) = 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

punto critico $(1,0)$ è punto di minimo assoluto

DN $f: S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, S convesso

f si dice concava in S se $\forall x', x'' \in S$, $\forall \lambda \in (0,1)$ si ha

$$f(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \geq \lambda f(x') + (1-\lambda) f(x'').$$

Teorema $f \in C^2(A)$, A aperto convesso

se $H_x(\lambda) < 0$ $\forall x \in A \Rightarrow f$ è strettamente concava