Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
Analisi Matematica I: foglio di esercizi n. 1
14 ottobre 2015

Risolvere i seguenti problemi. Da consegnare entro il 22/10.

Pb 1. Mostrare che per il seguente insieme A si ha $\sup A = 1$ e $\inf A = -1$, specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

$$A = \left\{ (-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} : \; n \in \mathbf{N}, \; n \geq 1 \right\}.$$

Pb 2. Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbf{Q} : \; x^2 - 3x + 2 \leq 0\},$$

specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Pb 3. Mostrare che per il seguente insieme A si ha $\sup A = 1$ e $\inf A = 0$, specificando se si tratta di massimo e/o di minimo.

$$A = \left\{ \frac{\log x}{\sqrt{1 + \log^2 x}} : \; x \in \mathbb{R}, \; x \geq 1 \right\}.$$

Pb 4. Sia A un sottinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Definiamo l'insieme $(-A)$ nel modo seguente: $(-A) = \{-a : \; a \in A\}$. Mostrare che

$$\inf A = -\sup\,(-A).$$

Soluzioni:

Pb 1. Innanzitutto, per $n \geq 1$ si ha $0 \leq \frac{n^2-1}{n^2+1} < 1$, da cui

$$-1 < \frac{n^2-1}{n^2+1} < 1:$$

-1 è un minorante e $+1$ un maggiorante di A. Mostriamo che $+1$ è il *minimo* dei maggioranti: per ogni $\varepsilon > 0$ dobbiamo mostrare che $1-\varepsilon$ non è un maggiorante, cioè esiste $n \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$(*)\ (-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} > 1-\varepsilon.$$

Innanzitutto, per ragioni di segno dell'espressione coinvolta è evidente che un tale n vada cercato tra i numeri *pari*. Con facili conti si trova che $(*)$ è verificata se n è pari e $n > \sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}$. Analogamente, -1 è il *massimo* dei minoranti. Infatti, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, troviamo che per n *dispari* con $n > \sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}$ vale

$$(-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} < -1+\varepsilon.$$

Non c'è né massimo né minimo perché -1 e $+1$ non appartengono all'insieme dato.

Pb 2. Risolvendo la disequazione di secondo grado troviamo che

$$A = \{x \in \mathbf{Q}:\ 1 \leq x \leq 2\}.$$

da cui $\max A = 2$, $\min A = 1$. Questi sono ovviamente anche il sup e l'inf rispettivamente.

Pb 3. Per $x \geq 1$, il logaritmo assume tutti i valori reali ≥ 0. Quindi possiamo riscrivere l'insieme come segue:

$$A = \left\{ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}:\ t \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \right\}.$$

Gli elementi dell'insieme sono evidentemente non negativi, per cui $\min A = \inf A = 0$ (si ottiene per $t = 0$). Inoltre $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} < 1$ perché il denominatore è più grande del numeratore: ne segue che 1 è un maggiorante e non può essere il massimo. È anche il sup, infatti per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $t \geq 0$ tale che

$$\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} > 1-\varepsilon:$$

con facili conti si trova che basta prendere $t > \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$.

Pb 4. Supponiamo A inferiormente limitato e sia $m = \sup(-A)$. Allora i maggioranti di $(-A)$ sono tutti e soli i punti della semiretta chiusa $[m, +\infty)$:

$$(M \geq -a \ \forall a \in A) \ \Leftrightarrow \ (M \geq m).$$

Cambiando di segno in entrambe le disuguaglianze otteniamo

$$(-M \leq a \ \forall a \in A) \ \Leftrightarrow \ (-M \leq -m),$$

cioè i minoranti di A sono tutti e soli i punti della semiretta $(-\infty, -m]$: il massimo dei minoranti è proprio $-m$, come volevasi dimostrare. Se poi A è illimitato inferiormente, allora con analogo ragionamento si vede che $-A$ è illimitato superiormente.