Interpretazione topologica della forma angolare

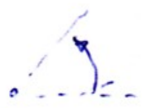
$$\omega_{P_0} = \frac{-(x-x_0)\,dy + (y-y_0)\,dx}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)} \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}, \quad P_0 = (x_0, y_0)$$

winding number

$$\boxed{\mathrm{ind}_\Gamma(P_0) := \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \omega_P \in \mathbb{Z}}$$

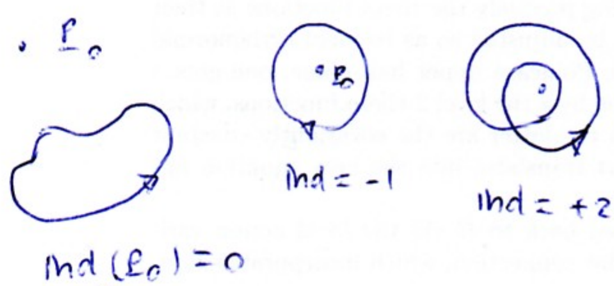
indice di avvolgimento di Γ attorno a P_0

Γ generalmente regolare



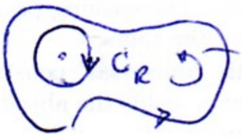
Ciò è chiaro dal fatto che $\omega_{P_0} = d\varphi$,

φ angolo opportunamente misurato. Se ad esempio



"catena" L_0: $\Gamma - C_r = \partial D$ (+)

$$\int_{\Gamma - C_r}\omega = \int_\Gamma \omega - \int_{C_r}\omega = \iint_D d\omega = 0$$ (Green)



$$\mathrm{ind}_\Gamma = \mathrm{ind}_{C_r} = 1$$

ind è invariante per omotopia

$$F : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(t, s) \longmapsto F(t,s) \equiv \gamma_t(s)$$

omotopia tra γ_0 e γ_1

$$F(0,s) = \gamma_0(s)$$
$$F(1,s) = \gamma_1(s)$$

$\gamma_0 \simeq \gamma_1$ γ_0 omotopa a γ_1

($\simeq$ è di equivalenza)

Infatti, dato che $\mathrm{ind}_\Gamma(P_0) \in \mathbb{Z}$,

$[0,1] \ni t \longmapsto \mathrm{ind}_{\gamma_t}(P_0)$ è continua e a valori interi e

dunque costante ($[0,1]$ è connesso).

+)

γ_1, γ_2 omologhe

$\gamma_2 - \gamma_1 = \partial D$

Formalizzeremo il concetto di omologia