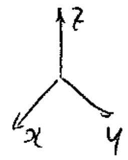
TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE Prof. M. Spera

Lezione XXXII - ADDENDUM

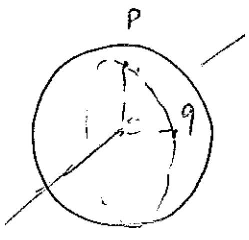
Rivediamo alcuni esempi di spazi omogenei alla luce del teorema della varietà quoziente (e delle sue conseguenze)

① $S^2 \cong SO(3)/SO(2)$



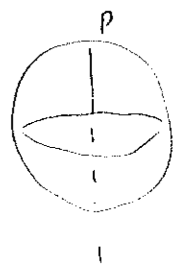
$S^2 = \{ x^2+y^2+z^2=1 \}$

$G = SO(3)$ agisce (in modo liscio) transitivamente su $M = S^2$: p e q su S^2 sono legati da almeno una rotazione $g \in SO(3)$



l'azione di G su S^2 è quella indotta da $SO(3)$ su $\mathbb{R}^3$

Il gruppo di isotropia $G_p \cong SO(2)$ (rotazioni attorno all'asse individuato da p.



se $p = (0,0,1)$

$$G_p = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$S^2 \cong G/G_p$

(2) $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) \cong \dfrac{U(n+1)}{U(n)\times U(1)}$

$\;\;\;\;|||$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

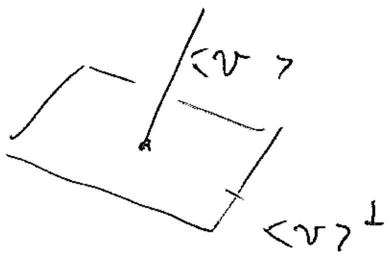
Sp. proiettivo complesso di dim n

$\left(\equiv \left\{ \text{"rette" complesse in } \mathbb{C}^{n+1} \right\} \right)$ per l'origine

Sia $\mathbb{C}^{n+1}$ munito del prod. scalare hermitiano standard

$U(n+1)$ agisce in modo transitivo su $\mathbb{C}^{n+1}$ (ovvio) e quindi su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Determiniamo il gruppo di isotropia di un pto $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

$p = \langle v \rangle$ sott. unidimensionale generato da $v \neq \underline{0}$ (si può assumere $\|v\| = 1$) : le trasformazioni unitarie



in questione sono esattamente quelle che conservano la decomposizione ortogonale $\langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp = \mathbb{C}^n$

cioè quegli unitari $U \in U(n+1)$ tali che

$U\langle v \rangle \subseteq \langle v \rangle$

$U\langle v \rangle^\perp \subseteq \langle v \rangle^\perp$

Pertanto è necessariamente $U\langle v \rangle = \langle v \rangle$

ossia $Uv = e^{i\varphi} v \equiv U' v$ $\quad (\|Uw\| = \|w\|)$

e $U\langle v \rangle^\perp = \langle v^\perp \rangle$ $\quad \boxed{U' \in U(1)}$

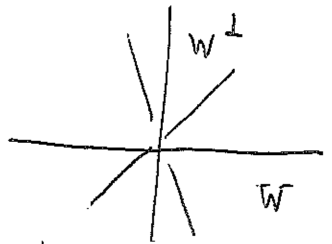
In concreto, se $v = (1, 0, 0, \dots 0)$

$$U = \left(\begin{array}{c|ccc} U' & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & U'' & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \qquad \boxed{U'' \in U(n)}$$

$$U = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} U' & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right)}_{\tilde{U}'} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & U'' \end{array} \right)}_{\tilde{U}''}$$

$\square$

(3)



V

$$V = \underset{\text{dim: } k}{\underset{\uparrow}{W}} \oplus \underset{\text{dim: } n-k}{\underset{\uparrow}{W^\perp}}$$

$(V, \langle\ \rangle)$ sp. hermitiano

$$\mathrm{Gr}(V, k) \cong \frac{U(V)}{U(W) \times U(W^\perp)}$$

$$\mathrm{Gr}(V,k) = \left\{ \begin{array}{l} \text{sottospazi di} \\ V \text{ di dim } k \end{array} \right\}$$

Grassmanniana

isotropia di $W \leq V$ di dim k: consiste delle $U \in U(V)$ che conservano la decomposizione $V = W \oplus W^\perp$

$$\mathrm{Gr}(n, k) \cong \frac{U(n)}{U(k) \times U(n-k)}$$

nel caso reale: $\mathrm{Gr}(n, k) \cong \dfrac{O(n)}{O(k) \times O(n-k)}$

$(\mathbb{R}^n, \langle\ \rangle)$

prod. scal. standard

Sia $W = \langle e_1 \dots e_k \rangle$; $W^\perp = \langle e_{k+1} \dots e_n \rangle$

$U \in G_{\underset{W}{\overset{\shortparallel}{P}}}$: $\left(\begin{array}{c|c} U_1 & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array} \right)$

In generale. Se G_p è il gruppo di isotropia di p,
e $q = g \cdot p$, chi è G_q ?

R: sia $h \in G_p$: $hp = p$

si ha, $\forall g \in G$: $g \cdot h \cdot p = g \cdot p = q$

ma $ghp = ghg^{-1} \cdot gp = ghg^{-1} \cdot q = q$

$\Rightarrow$ si mostra facilmente a $\underset{\overset{\parallel}{q}}{G_{g \cdot p}} = g \cdot G_p \, g^{-1}$

ovvero, i gruppi di isotropia di pt. diversi
<u>sono</u> <u>coniugati</u>

Ancora sulla fibrazione di Hopf

$$\mathbb{C}^2 = \{(z_0, z_1)\}$$

$$S^3 \subset \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4 \qquad |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$$

Si consideri la mappa

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \cong S^2 \text{ (pr. stereografica)}$$

$$(z_0, z_1) \longmapsto [z_0, z_1]$$

essa induce una mappa

$$H: \quad S^3 \longmapsto \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \cong S^2$$

(stessa formula, con $(z_0, z_1) \in S^3 : \{|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$)

La controimmagine di $p = [z_0, z_1] \in S^2$ è

$$(\ast) \quad H^{-1}(p) = \{(e^{i\varphi} z_0, e^{i\varphi} z_1)\} \approx S^1 \quad \text{(topologicamente è una circonferenza)}$$

Se $S^1 \cong U(1)$ agisce su S^3 tramite

$$(z_0, z_1) \longmapsto (e^{i\varphi} z_0, e^{i\varphi} z_1)$$

l'orbita di $p : (z_0, z_1)$ è $\{(e^{i\varphi} z_0, e^{i\varphi} z_1)\}_{\varphi \in \mathbb{R}}$ ovvero $[z_0, z_1] \in S^2$. Pertanto $S^3/S^1 \cong S^2$

viceversa, ogni pto di S^2 dà vita ad un'orbita di S^1 (cf. $(\ast)$)

La descrizione precedente è compatibile con

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \cong & \dfrac{U(2)}{U(1)\times U(1)} \\ \wr & & \\ \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) & & \end{array}$$

$$U(2) = SU(2) \times U(1)$$

$U' \in U(2)$:

$$|\det U'| = 1$$

posto

$$U = \frac{U'}{\det U'} \quad \text{è} \quad \det U = 1$$

$$\begin{array}{ccccc} U' & = & U & \cdot & \det U' \\ \cap & & \cap & & \cap \\ U(2) & & SU(2) & & U(1) \end{array}$$