

# Sistemi

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche

Anno Accademico 2009-2010

Docenti: Vincenzo Manca, Riccardo Muradore, Tiziano Villa

1 Luglio 2010

Metodi di Specifica  
1 Luglio 2010

Nome e Cognome:

Corso di Laurea:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	6	
problema 2	4	
totale	10	

1. Si considerino le due macchine a stati finiti seguenti:

Macchina  $M'$ :

- stati:  $s'_a, s'_b, s'_c, s'_d, s'_e$  con  $s'_a$  stato iniziale;
- transizione da  $s'_a$  a  $s'_b$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s'_a$  a  $s'_c$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s'_b$  a  $s'_d$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s'_c$  a  $s'_e$ :  $\bullet/1$ ,  
transizione da  $s'_d$  a  $s'_d$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s'_e$  a  $s'_e$ :  $\bullet/0$ .

Macchina  $M''$ :

- stati:  $s''_x, s''_y, s''_z, s''_u$  con  $s''_x$  stato iniziale;
- transizione da  $s''_x$  a  $s''_y$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s''_y$  a  $s''_z$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s''_y$  a  $s''_u$ :  $\bullet/1$ ,  
transizione da  $s''_z$  a  $s''_z$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s''_u$  a  $s''_u$ :  $\bullet/0$ .

Si risponda in ordine alle seguenti domande (si indichi sempre il numerale romano in ogni risposta):

(a) Si disegnino i diagrammi di transizione delle due macchine.

(b) Si classifichino le macchine rispetto al determinismo.

Traccia di risposta.

$M'$  e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.

$M''$  e' pseudo-nondeterministica.

(c) Si trovi una simulazione di  $M'$  da parte di  $M''$ , se esiste.

Traccia di risposta.

$M'$  e' simulata da  $M''$  come mostrato dalla relazione

$$R_{M'-M''} = \{(s'_a, s''_x), (s'_b, s''_y), (s'_c, s''_y), (s'_d, s''_z), (s'_e, s''_u)\}.$$

(d) Si trovi una simulazione di  $M''$  da parte di  $M'$ , se esiste.

Traccia di risposta.

$M''$  non e' simulata da  $M'$  perche'  $s''_x$  dovrebbe essere simulato da  $s'_a$  e quindi a sua volta ci dovrebbe essere uno stato di  $M'$  che simula  $s'_y$ , ma tale stato non esiste (ne'  $s'_b$ , ne'  $s'_c$  simulano  $s'_y$  perche' nessuno dei due ha sia una transizione con uscita 1 sia una transizione con uscita 0).

(e) Si trovi una bisimulazione tra le due macchine, se esiste.

Traccia di risposta.

Poiché  $M''$  non è simulata da  $M'$  non ci può essere una bisimulazione tra le due macchine.

(f) Si applichi a  $M'$  l'algoritmo di minimizzazione che ottiene  $\min(M')$ , una macchina equivalente a  $M'$  con un numero minimo di stati tra quelle bisimili a  $M'$ .

Traccia di risposta.

Macchina  $\min(M')$  per minimizzazione nella classe delle macchine bisimili (da  $M'$  per equivalenza degli stati  $s'_b$ ,  $s'_d$  e  $s'_e$ ):

- stati:  $s'_a$ ,  $s'_c$ ,  $s'_{b-d-e}$  con  $s'_a$  stato iniziale;
- transizione da  $s'_a$  a  $s'_{b-d-e}$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s'_a$  a  $s'_c$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s'_c$  a  $s'_{b-d-e}$ :  $\bullet/1$ ,  
transizione da  $s'_{b-d-e}$  a  $s'_{b-d-e}$ :  $\bullet/0$ .

(g) Si applichi a  $M''$  l'algoritmo di minimizzazione che ottiene  $\min(M'')$ , una macchina equivalente a  $M''$  con un numero minimo di stati tra quelle bisimili a  $M''$ .

Traccia di risposta.

Macchina  $\min(M'')$  per minimizzazione nella classe delle macchine bisimili (da  $M''$  per equivalenza degli stati  $s''_z$  e  $s''_u$ ):

- stati:  $s''_x$ ,  $s''_y$ ,  $s''_{z-u}$  con  $s''_x$  stato iniziale;
- transizione da  $s''_x$  a  $s''_y$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s''_y$  a  $s''_{z-u}$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s''_y$  a  $s''_{z-u}$ :  $\bullet/1$ ,  
transizione da  $s''_{z-u}$  a  $s''_{z-u}$ :  $\bullet/0$ .

(h) Esiste una macchina equivalente a  $M'$  con meno stati di  $\min(M')$  ?

Traccia di risposta.

In linea di principio potrebbe esistere, ma non tra quelle bisimili a  $M'$ . Per provarlo bisognerebbe applicare un algoritmo che minimizzi le macchine non-deterministiche di tipo generale, o argomentare sull'esempio specifico che due stati non basterebbero per il linguaggio di tale macchina.

(i) Esiste una macchina equivalente a  $M''$  con meno stati di  $\min(M'')$  ?

Traccia di risposta.

In linea di principio potrebbe esistere, ma non tra quelle bisimili a  $M''$ . Per provarlo bisognerebbe applicare un algoritmo che minimizzi le macchine non-deterministiche di tipo generale, o argomentare sull'esempio specifico che due stati non basterebbero per il linguaggio di tale macchina.

- (j)  $\min(M')$  simula  $\min(M'')$  ?  $\min(M'')$  simula  $\min(M')$  ? C'è una bisimulazione tra  $\min(M')$  e  $\min(M'')$  ?

Traccia di risposta.

$\min(M')$  simula  $\min(M'')$  ? No (stesso motivo per cui  $M'$  non simula  $M''$ ).

$\min(M'')$  simula  $\min(M')$  ? Sì (relazione simile a quella per cui  $M''$  simula  $M'$ ).

C'è una bisimulazione tra  $\min(M')$  e  $\min(M'')$  ? No.

- (k) Si commentino i risultati precedenti.

Traccia di risposta.

Le due macchine  $\min(M')$  e  $\min(M'')$  sono un esempio di macchine a stati finiti nondeterministiche equivalenti e ciascuna minimizzata (nella classe delle macchine bisimili), ma non isomorfe; in altri termini, esse mostrano che non esiste un'unica macchina a stati finita nondeterministica che realizza il sistema originale con il minimo numero di stati.

Si ricordi che se  $M'$  è simulata da  $M''$  allora  $M'$  raffina  $M''$ . In generale non vale il viceversa, cioè per  $M'$  e  $M''$  nondeterministiche il fatto che  $M''$  raffini  $M'$  non implica che ci sia una simulazione di  $M''$  da parte di  $M'$  (ad es. nel nostro caso non c'è). Ma se  $M'$  nondeterministica raffina  $M''$  pseudo-nondeterministica allora esiste una simulazione di  $M'$  da parte di  $M''$  (e infatti nel nostro caso c'è).

2. (a) Si consideri il seguente sistema a tempo discreto con ingressi  $x_1(n)$  e  $x_2(n)$ , variabile di stato  $s(n)$  e uscita  $y(n)$  con equazione

$$s(n+1) = 0,5s(n) + x_1(n) + x_2(n)$$

$$y(n) = s(n)$$

Si disegni lo schema a blocchi del sistema risultante con ingressi  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ , variabile di stato  $s(n)$  ed uscita  $y(n)$ .

Si chiuda in retroazione l'uscita  $y(n)$  sull'ingresso  $x_2(n)$ . Si calcoli l'equazione dello stato  $s(n+1)$  in funzione di  $x_1(n)$  e  $s(n)$ .

Si disegni lo schema a blocchi del sistema risultante con ingresso  $x_1(n)$ , variabile di stato  $s(n)$  ed uscita  $y(n)$ .

Traccia di soluzione.

$$\begin{aligned} s(n+1) &= 0,5s(n) + s(n) + x_1(n) \\ &= 1,5s(n) + x_1(n) \\ y(n) &= s(n) \end{aligned}$$

- (b) Si consideri il seguente sistema combinatorio con ingresso  $x$  e uscita  $f(x) = x^2$  con  $f$  funzione da interi a interi. Si chiuda in retroazione l'uscita  $f(x)$  sull'ingresso  $x$ . Il sistema risultante e' ben formato ?

Traccia di soluzione.

No. Ci sono due punti fissi perche' l'equazione  $x = x^2$  ha due soluzioni:  $x = 0, x = 1$ .

- (c) Si consideri il seguente sistema combinatorio con ingresso  $x$  e uscita  $f(x) = 1 + x^2$  con  $f$  funzione da reali a reali. Si chiuda in retroazione l'uscita  $f(x)$  sull'ingresso  $x$ . Il sistema risultante e' ben formato ?

Traccia di soluzione.

No. Non c'e' alcun punto fisso perche' l'equazione  $x = 1 + x^2$  non ha soluzioni nel campo reale.

- (d) Si consideri il seguente sistema combinatorio con ingresso  $x$  e uscita  $f(x) = 1 - x$  con  $f$  funzione da razionali a razionali. Si chiuda in retroazione l'uscita  $f(x)$  sull'ingresso  $x$ . Il sistema risultante e' ben formato ?

Traccia di soluzione.

Si. C'e' un unico punto fisso perche' l'equazione  $x = 1 - x$  ha una soluzione unica  $x = 0,5$ .