

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

19 Luglio 2011

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	12	
problema 2	8	
problema 3	10	
totale	30	

1. (a) Si considerino le due macchine a stati finiti seguenti:

Macchina M' :

- stati: $s'_1, s'_2, s'_{3a}, s'_{3b}$ con s'_1 stato iniziale;
- transizione da s'_1 a s'_2 : $\bullet/0$,
transizione da s'_2 a s'_{3a} : $\bullet/0$,
transizione da s'_2 a s'_{3b} : $\bullet/0$,
transizione da s'_{3a} a s'_2 : $\bullet/1$,
transizione da s'_{3b} a s'_1 : $\bullet/1$.

Macchina M'' :

- stati: s''_1, s''_2, s''_3 con s''_1 stato iniziale;
- transizione da s''_1 a s''_2 : $\bullet/0$,
transizione da s''_2 a s''_3 : $\bullet/0$,
transizione da s''_3 a s''_2 : $\bullet/1$,
transizione da s''_3 a s''_1 : $\bullet/1$.

Si risponda in ordine alle seguenti domande (si indichi sempre il numerale romano in ogni risposta):

- Si disegnino i diagrammi di transizione delle due macchine.
- Si classifichino le macchine rispetto al determinismo.

Traccia di soluzione.

M' e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.

M'' e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.

- Si trovi una simulazione di M' da parte di M'' , se esiste.

Traccia di soluzione.

M'' simula M' come mostrato dalla relazione:

$$R_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_{3a}, s''_3), (s'_{3b}, s''_3)\}.$$

- Si trovi una simulazione di M'' da parte di M' , se esiste.

Traccia di soluzione.

M' non simula M'' . Se infatti si cercasse di costruire una simulazione si dovrebbe avere:

$$(s''_1, s'_1) \xrightarrow{\bullet/0} (s''_2, s'_2), \text{ poi } (s''_2, s'_2) \xrightarrow{\bullet/0} \begin{cases} \text{caso a) } (s''_3, s'_{3a}) \\ \text{oppure} \\ \text{caso b) } (s''_3, s'_{3b}) \end{cases}$$

$$\text{da cui nel caso a) si avrebbe } (s''_3, s'_{3a}) \xrightarrow{\bullet/1} \begin{cases} \text{sia } (s''_2, s'_2) \\ \text{che } (s''_1, s'_1) \end{cases} \text{ e poi}$$

$$(s_1'', s_2') \xrightarrow{\bullet/0} \begin{cases} \text{caso c)} & (s_2'', s_{3a}') \\ \text{oppure} & \\ \text{caso d)} & (s_2'', s_{3b}') \end{cases} \quad \text{ma in entrambi i casi c) e d) non}$$

si puo' proseguire perche s_2'' puo' produrre solo 0 mentre sia s_{3a}' che s_{3b}' possono produrre solo 1;

$$\text{nel caso b) si avrebbe } (s_3'', s_{3b}') \xrightarrow{\bullet/1} \begin{cases} \text{sia } (s_1'', s_1') \\ \text{che } (s_2'', s_1') \end{cases} \text{ e poi } (s_2'', s_1') \xrightarrow{\bullet/0}$$

(s_3'', s_2') , ma non si puo' proseguire perche s_3'' puo' produrre solo 1 mentre s_2' puo' produrre solo 0.

Quindi non esiste una simulazione di M'' da parte di M' .

- v. Si trovi una bisimulazione tra le due macchine, se esiste.

Traccia di soluzione.

Non puo' esistere una bisimulazione, perche' non esiste neppure una simulazione di M'' da parte di M' .

- vi. A questo punto che cosa si puo' dedurre circa il confronto dei comportamenti di M'' ed M' ?

Traccia di soluzione.

Dal fatto che M' e' simulato da M'' si ha che M' raffina M'' , cioe' $M' \subseteq M''$, mentre nulla si puo' dire nell'altra direzione.

- vii. Si minimizzi la macchina M' (con l'algoritmo che trova una macchina bisimile minima) e si mostri il diagramma di transizione della macchina minimizzata cosi' trovata $\min(M')$.

Traccia di soluzione.

La macchina M' e' gia' minimizzata.

- viii. Si minimizzi la macchina M'' (con l'algoritmo che trova una macchina bisimile minima) e si mostri il diagramma di transizione della macchina minimizzata cosi' trovata $\min(M'')$.

Traccia di soluzione.

La macchina M'' e' gia' minimizzata.

- ix. Si determinizzi la macchina M' e si mostri il diagramma di transizione della macchina deterministica cosi' trovata $\det(M')$.

Traccia di soluzione.

Macchina $\det(M')$:

- stati: $\{s_1'\}, \{s_2'\}, \{s_{3a}', s_{3b}'\}, \{s_1', s_2'\}, \{s_2' s_{3a}', s_{3b}'\}$ con $\{s_1'\}$ stato iniziale;

- transizione da $\{s'_1\}$ a $\{s'_2\}$: $\bullet/0$,
- transizione da $\{s'_2\}$ a $\{s'_{3a}, s'_{3b}\}$: $\bullet/0$,
- transizione da $\{s'_{3a}, s'_{3b}\}$ a $\{s'_1, s'_2\}$: $\bullet/1$,
- transizione da $\{s'_1, s'_2\}$ a $\{s'_2, s'_{3a}, s'_{3b}\}$: $\bullet/0$,
- transizione da $\{s'_2, s'_{3a}, s'_{3b}\}$ a $\{s'_1, s'_2\}$: $\bullet/1$,
- transizione da $\{s'_2, s'_{3a}, s'_{3b}\}$ a $\{s'_{3a}, s'_{3b}\}$: $\bullet/0$.

- x. Si determinizzi la macchina M'' e si mostri il diagramma di transizione della macchina deterministica così trovata $\det(M'')$.

Traccia di soluzione.

Macchina $\det(M'')$:

- stati: $\{s''_1\}, \{s''_2\}, \{s''_3\}, \{s''_1, s''_2\}, \{s''_2, s''_3\}$ con $\{s''_1\}$ stato iniziale;
- transizione da $\{s''_1\}$ a $\{s''_2\}$: $\bullet/0$,
- transizione da $\{s''_2\}$ a $\{s''_3\}$: $\bullet/0$,
- transizione da $\{s''_3\}$ a $\{s''_1, s''_2\}$: $\bullet/1$,
- transizione da $\{s''_1, s''_2\}$ a $\{s''_2, s''_3\}$: $\bullet/0$,
- transizione da $\{s''_2, s''_3\}$ a $\{s''_1, s''_2\}$: $\bullet/1$,
- transizione da $\{s''_2, s''_3\}$ a $\{s''_3\}$: $\bullet/0$.

- xi. Si trovi una simulazione di $\det(M')$ da parte di $\det(M'')$, se esiste; una simulazione di $\det(M'')$ da parte di $\det(M')$, se esiste; una bisimulazione tra $\det(M')$ e $\det(M'')$, se esiste.

Traccia di soluzione.

I grafi delle transizioni delle macchine $\det(M')$ e $\det(M'')$ sono isomorfi (a meno di ridenominazione degli stati) e perciò le macchine $\det(M')$ e $\det(M'')$ sono uguali (e in particolare bisimili), e quindi anche M' e M'' sono uguali.

- xii. Si commentino i risultati precedenti.

Traccia di soluzione.

Con lo strumento della simulazione si è potuto stabilire solo che M' raffina M'' , cioè $M' \subseteq M''$. Per sapere se valga anche l'uguaglianza, si è ricorsi alla determinizzazione di entrambe che ha prodotto due macchine pseudo-nondeterministiche con gli stessi grafi delle transizioni, permettendoci di concludere che sono uguali (e che perciò valeva anche l'inclusione nella direzione opposta).

2. Si consideri il seguente automa temporizzato:

- locazione: l_1 , dove l_1 e' la locazione iniziale con condizioni iniziali $s(0) := 0$;
- dinamica della locazione l_1 : $\dot{s}(t) = 1$ (flusso), $s(t) \leq 3$ (invariante), $y(t) = 2.s(t)$ (uscita).
- transizione da l_1 a l_1 : $A/y(t), s(t) := 0$,
dove $A = \{s(t) \mid s(t) = 3\}$,
(la sintassi delle annotazioni di una transizione e' *guardia/uscita, azione*);
- ingresso assente perche' il sistema e' autonomo;
- uscita $y(t) \in \text{Reali}$.

- (a) Si disegni il diagramma di transizione degli stati dell'automa, annotando con precisione locazioni e transizioni.

- (b) Si disegni sugli assi delle coordinate (con il tempo in ascissa) la variabile di stato $s(t)$ e quella d'uscita $y(t)$ nell'intervallo $t \in [0, 12]$.

Traccia di risposta.

I grafici dello stato $s(t)$ e dell'uscita $y(t)$ sono tracciati in Fig. 1.

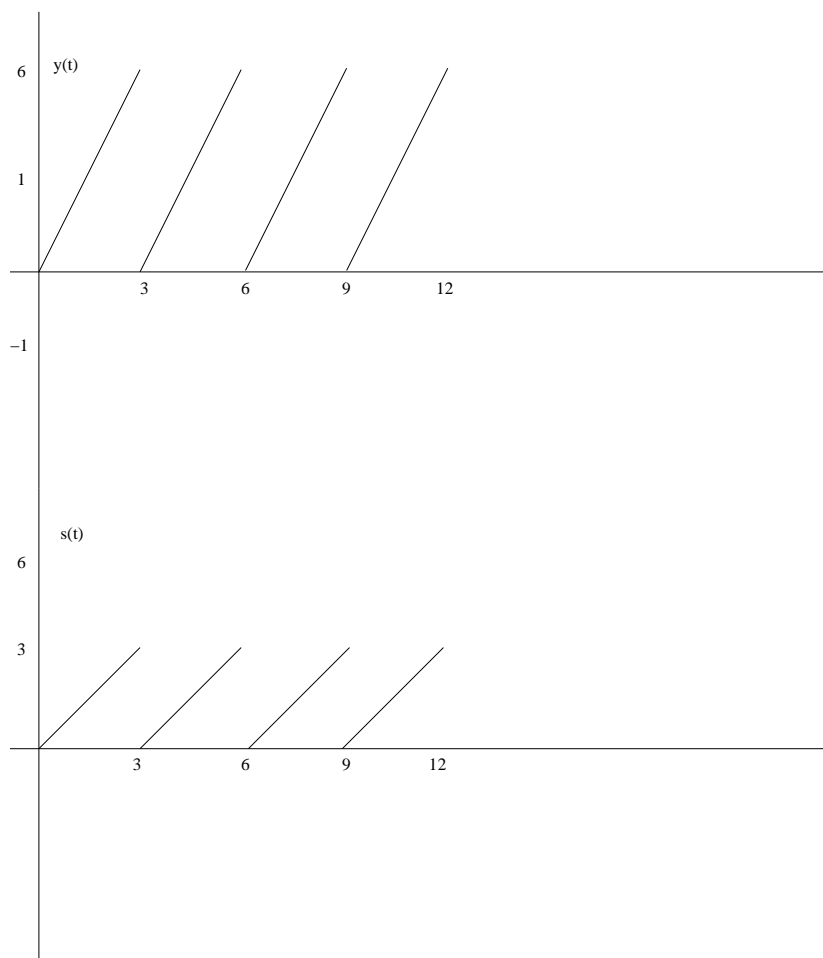


Figure 1: In basso il tracciato di $s(t)$ e in alto il tracciato di $y(t)$.

- (c) Esiste una bisimulazione finita di un automa temporizzato (le cui uniche dinamiche sono orologi del tipo $\dot{s}(t) = 1$) ? Se si, si spieghi nelle linee generali la costruzione che permetterebbe di ottenere tale risultato.

Traccia di risposta.

La risposta e' si'. Si vedano le dispense per la costruzione di un automa finito che corrisponde alla bisimulazione.

3. Si consideri un impianto G con $\Sigma = \{a, b\}$, $\Sigma_{uc} = \{b\}$, $L(G) = \overline{a^*ba^*}$ (cioe' il linguaggio ottenuto dai prefissi delle stringhe dell'espressione regolare a^*ba^*), $L_m(G) = a^*ba^*$.

Si supponga che il linguaggio generato desiderato sia dato da $K^n = \{a^k, k > n\} \cup \{a^kba^*, k \leq n\} \subseteq L(G)$, cioe' si richiede che l'impianto controllato blocchi l'evento b dopo $n + 1$ occorrenze iniziali dell'evento a .

- (a) Il linguaggio K^n e' controllabile ? Si enunci la definizione di controllabilita' di un linguaggio e la si applichi al caso.

Si mostrino il grafo di G e quello della specifica K^n per $n = 2$.

Traccia di soluzione

Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E , con $E_{uc} \subseteq E$. Si dice che K e' controllabile rispetto a M e E_{uc} , se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_{uc}$ si ha

$$s\sigma \in M \Rightarrow s\sigma \in \overline{K}.$$

[equivalente a $\overline{K}E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}$]

Per la definizione di controllabilita', si ha che K e' controllabile se e solo se \overline{K} e' controllabile.

Si applichi la definizione di controllabilita' al nostro esempio dove $M = L(G)$.

$K^n, n \geq 0$ non e' controllabile. Ad esempio, $a^{n+1} \in \overline{K^n}$, $a^{n+1}b \in L(G) \setminus \overline{K^n}$.

Intuitivamente, dopo che l'impianto produce l'evento a per $n + 1$ volte di seguito, dovrebbe disabilitare b per rimanere nella parte di specifica pertinente che e' $\{a^k, k > n\}$, ma non puo' farlo perche' b e' incontrollabile.

- (b) Per calcolare il sottolinguaggio controllabile supremo $K^{\uparrow C}$ contenuto in una data specifica K , si puo' applicare il seguente schema iterativo, la cui convergenza e' garantita quando K e $L(G)$ sono linguaggi regolari:

- $K_0 = K$,
- $K_{i+1} = K_i \setminus [(L(G) \setminus K_i)/\Sigma_{uc}]\Sigma^*$.

Si applichi tale alla formula al nostro problema precedente.

Per ogni passo dell'iterazione si mostrino i calcoli in dettaglio. Ad es., si mostrino i calcoli di: $L(G) \setminus K_i$, $(L(G) \setminus K_i)/\Sigma_{uc}$. $K_{i+1} = K_i \setminus [(L(G) \setminus K_i)/\Sigma_{uc}]\Sigma^*$.

Suggerimento

Si ricordi l'operazione di quoziente tra linguaggi. Dati i linguaggi $L_1, L_2 \in \Sigma^*$, il quoziente L_1/L_2 e' definito come segue:

$$L_1/L_2 = \{s \in \Sigma^* : (\exists t \in L_2)[st \in L_1]\}.$$

In altri termini L_1/L_2 contiene i prefissi delle stringhe di L_1 ottenuti rimuovendo dalle stringhe di L_1 i suffissi costituiti da eventi incontrollabili.

Traccia di soluzione

Si ha $K_0 = K^n$.

Si calcoli K_1 come segue.

$$L(G) \setminus K_0 = L(G) \setminus K^n = \overline{a^*ba^*} \setminus (\{a^k, k > n\} \cup \{\overline{a^kba^*}, k \leq n\}) = \{a^kba^*, k > n\}.$$

$$(L(G) \setminus K_0)/\Sigma_{uc} = \{a^kba^*, k > n\}/\{b\} = \{a^kb, k > n\}/\{b\} = \{a^k, k > n\}.$$

$$\text{Percio' } K_1 = K_0 \setminus [(L(G) \setminus K_0)/\Sigma_{uc}]\Sigma^* = K^n \setminus [\{a^k, k > n\}]\Sigma^* = (\{a^k, k > n\} \cup \{\overline{a^kba^*}, k \leq n\}) \setminus [\{a^k, k > n\}]\Sigma^* = \{\overline{a^kba^*}, k \leq n\}.$$

Si calcoli K_2 come segue.

$$L(G) \setminus K_1 = \overline{a^*ba^*} \setminus \{\overline{a^kba^*}, k \leq n\} = \{a^kba^*, k > n\} \cup \{a^k, k > n\}.$$

$$(L(G) \setminus K_1)/\Sigma_{uc} = (\{a^kba^*, k > n\} \cup \{a^k, k > n\})/\Sigma_{uc} = \{a^k, k > n\}.$$

$$\text{Percio' } K_2 = K_1 \setminus [(L(G) \setminus K_1)/\Sigma_{uc}]\Sigma^* = \overline{\{a^kba^*, k \leq n\}} \setminus [\{a^k, k > n\}]\Sigma^* = \{\overline{a^kba^*}, k \leq n\} = K_1.$$

$$\text{In conclusione } K^{\uparrow C} = K_1 = \overline{\{a^kba^*, k \leq n\}}.$$