VARIAZIONE SUL TEMA

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE
Prof. M. Spera
a.a. 2009/10
Lezione XXXI

Proposizione Sia $\pi : X \to X/G$, e Hausdorff

$A \subset X$, A aperto, con

1) $\pi|_A : A \to X/G$ suriettiva

[i.e. A interseca tutte le orbite di G]

2) $\{ g \in G \,/\, g(A) \cap A \neq \emptyset \}$ è finito

Allora X/G è Hausdorff.

Dim. Siano $g_1 \ldots g_n \in G$ t.c. $A \cap g_i(A) \neq \emptyset$

Siano $p, q \in X/G$, $p \neq q$ e $x, y \in A$ t.c.

$$\pi(x) = p$$
$$\pi(y) = q$$

Poiché X è Hausdorff, $\exists$ U_i, V_i $U_i \cap V_i = \emptyset$ $i = 1..n$

tali che $x \in U_i$, $g_i(y) \in V_i$ (i.e. $y \in g_i^{-1}(V_i)$).

Definiamo
$$\underset{x \in}{U} = A \cap \bigcap_{i=1}^n U_i \qquad \underset{y \in}{V} = A \cap \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}(V_i)$$

Dimostriamo che $\boxed{U \cap g(V) = \emptyset \quad \forall g \in G}$ punto cruciale

ciò assicurerà la condizione T_2.

se g è tale che $g(A) \cap A = \emptyset$, allora $\boxed{}$ è vera ($U \subset A$, $V \subset A$)

Se $g = g_i$, è $U \subset U_i$, $V \subset g^{-1}(V_i)$ e

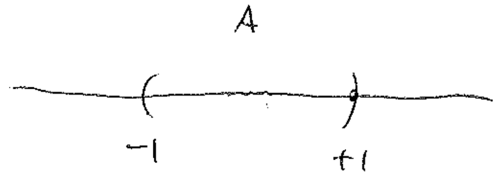
$$U \cap g(V) \subset U_i \cap V_i = \emptyset$$

Ma allora, dato che π è aperta, $\pi(U)$ e $\pi(g(V)) = \pi(V)$ sono aperti disgiunti in X/G contenenti p e q, risp.

Esempio : $X = \mathbb{R}$ $\qquad$ $G = \mathbb{Z}$

$$T_k : x \longmapsto x + k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$A = (-1, 1)$



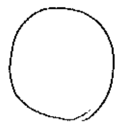
tutte le orbite intersecano A; in particolare

$\{T_k(-1)\} \cap A = \{0\}$

$\{T_k(1)\} \cap A = \{0\}$

$$\{ g \in G \,/\, g(A) \cap A \neq \emptyset \} = \{ T_0 , T_{-1} , T_{+1} \}$$

$$X/G = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1$$



(Hausdorff)

In generale $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \approx \mathbb{T}^n$ toro n-dimensionale

$\mathbb{T}^1 = S^1$

[$\mathbb{R}^n$ rivestimento universale di $\mathbb{T}^n$

$\pi_1(\mathbb{T}^n, *) \cong \mathbb{Z}^n$]

$$\star \quad \underset{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})}{\overset{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}{\parallel}} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\} \big/ \sim$$

"rette complesse" per l'origine in $\mathbb{C}^{n+1}$

$$x \sim y \iff x = \rho y \,, \quad \mathbb{C} \ni \rho \neq 0$$

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

spazio proiettivo complesso

$$\left(\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \approx S^2 \right)$$
(proiezione stereografica

[in generale sia $(\mathcal{H}, \langle , \rangle)$ uno spazio di Hilbert complesso, separabile]

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) := \mathcal{H} \setminus \{\underline{0}\} \big/ \sim$$

(spazio proiettivo associato)

è lo spazio degli stati (puri) della meccanica quantistica

$$\approx S_{\mathcal{H}} \big/ \sim$$ sfera unitaria

$\sim$: $\psi_1 \sim \psi_2$, $\|\psi_i\| = 1$

$\iff \psi_2 = e^{i\alpha} \psi_2$

fase

Descrizione come spazio quoziente [spazio omogeneo, addirittura simmetrico]

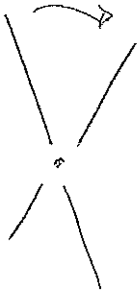
$$\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = \frac{U(n+1)}{U(n) \times U(1)}$$

dotato del prod. scalare hermitiano standard

g. isotropia di una retta complessa

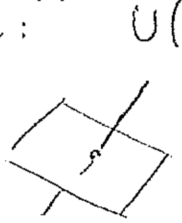
orbita: $\underset{U(n+1)}{G} \cdot x$

$U(n+1)$



$U(n+1)$ agisce transitivamente.

sottogruppo che lascia fissa una retta: $U(n) \approx$ trasformazioni unitarie del complemento ortogonale



$U(1)$: trasf. di fase.

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \equiv \mathbb{P}^1 = \frac{U(2)}{U(1)\times U(1)} \approx \frac{SU(2)}{U(1)\approx S^1}$$
$$\mathbb{P}^1 \simeq S^2$$

$$\approx \frac{S^3}{S^1}$$

$$|z_0|^2+|z_1|^2=1$$
$$S^3 \ni (z_0, z_1) \longmapsto [z_0, z_1] \in S^2 \cong \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$$

$$\pi^{-1}([z_0,z_1]) = \{(e^{i\varphi}z_0, e^{i\varphi}z_1)\}_{\varphi\in\mathbb{R}}$$

$\boxed{S^3 \xrightarrow{S^1} S^2}$ ... fibrazione di Hopf

☆ le fibre della fibrazione di Hopf sono cerchi. Di fatto sono annodati tra loro

(linking number = 1)

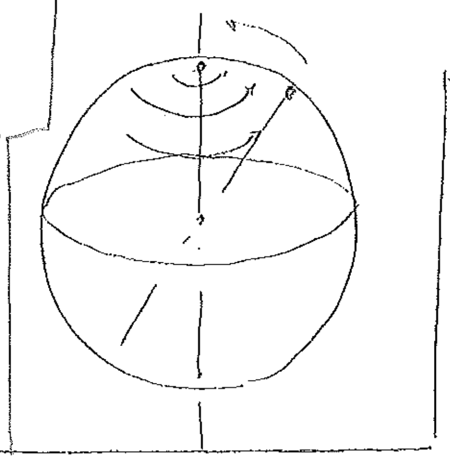
Altra descrizione (più concreta)

$$S^2 = \frac{SO(3)}{SO(2)} \qquad SO(2) \simeq U(1)$$

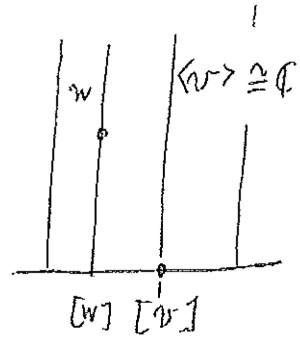
$SO(3)$ ← gruppo ortogonale speciale ($\det = +1$)

$SO(2)$ ← rotazioni del piano
$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \leftrightarrow e^{i\varphi}$$

$SO(2)$ su $\mathbb{R}^2$. su $\mathbb{C}$



$$\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$



★ inciso

fibrato tautologico su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$
(fibrato lineare complesso, ovvero in rette complesse)

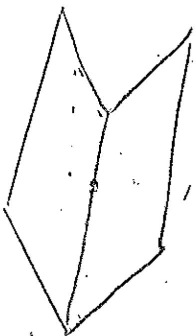
[non è un fibrato banale (ovvero, non è globalmente isomorfo a $\mathbb{P}^n\times\mathbb{C}\to\mathbb{P}^n$)
ciò ha addirittura conseguenze fisiche (fase di Aharonov-Anandan (.. Berry)]

$\star$ $Gr(n,k)$ Grassmanniana $\star\star\star$

$k \leq n$ (reale o complessa)

$\{$ sottospazi k-dimensionali di $\mathbb{C}^n$ / $\mathbb{R}^n$ (o V... in gen.) $\}$

$$Gr(n,k,\mathbb{C}) \approx \frac{U(n)}{U(n-k)\times U(k)} = \frac{Gl(n,\mathbb{C})}{Gl(n-k,\mathbb{C})\times Gl(k,\mathbb{C})}$$



due sott. qualsiasi (della stessa dimensione) possono essere sempre trasformati l'uno nell'altro (azione transitiva di Gr) (*)

$U = \langle u_1 \ldots u_k \rangle$
$U^\perp = \langle u_{k+1} \ldots u_n \rangle$ basi ortonormali

ex: $W = \langle e_1 \ldots e_k \rangle$

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_k & u_{k+1} \cdots \end{bmatrix}$$

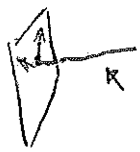
$U = \tilde{V}\cdot W$

; isotropia (s. gruppo che lascia fisso un s. spazio): stabilizzatore; consiste nel prodotto diretto delle trasformazioni del complemento ortogonale ($U(n-k)$) $Gl(n,k)$ e dei cambiamenti di base (limitati: $U(k)$; quindi $\neq Gl(n-k)$)

analogamente

$$Gr(n,k,\mathbb{R}) \approx \frac{Gl(n,\mathbb{R})}{Gl(n-k,\mathbb{R})\times Gl(k,\mathbb{R})}$$

$$\approx \frac{O(n)}{O(n-k)\times O(k)}$$



k s. spazio dato

sp. proiettivo: caso particolare: $Gr(n,1)$

$\mathbb{C}^n = U \oplus U^\perp$

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}$$

$U_1 \in U(k)$
$U_2 \in U(n-k)$

$\tilde{U} \cdot U = U$

✱ Varietà di Stiefel (dei riferimenti) (frames)

$$V_{n,k} = \frac{GL(n, \overset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}})}{GL(n-k, \overset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}})}$$

pto: $\vec{V}_0$

✱ sistema di riferimento

[origine fissa ...]

riferimenti unitari $\longrightarrow$ $\dfrac{U(n)}{U(n-k)}$

riferimenti ortonormali $\longrightarrow$ $\dfrac{O(n)}{O(n-k)}$

$\boxed{\text{Digressione}}$

✱ data una f. quadratica reale q, $A \in Sym(n,\mathbb{R})$ matrici simm.

$q(X) = X^t A X$, $X \in \mathbb{R}^n$

cambiando base: $X = MY$, $M \in GL(n,\mathbb{R})$

si ha $q(X) = (MY)^t A M Y$

$= Y^t \underbrace{(M^t A M)}_{B} Y$

$A \approx B$ se

$B = M^T A M$

$\approx$: congruenza

⚠ da non confondere con la similitudine

✱ Teorema di Sylvester

la segnatura di A è un invariante completo per congruenza

segnatura (p,q)

nota: è $p = \#\{\lambda_i > 0\}$

$q = \#\{\lambda_i < 0\}$

autovalori

✱ forma canonica

[concretamente si può usare l'algoritmo di Gauss simmetrico]

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \cdots \ 1}^{p} & & 0 \\ & \underbrace{-1 \ \cdots \ -1}_{q} & \\ 0 & & 0 \ \cdots \ 0 \end{pmatrix}$$

$r = p + q =$ rango

V. Sernesi vol I

oppure elegeoVIII.pdf (M.S.) in rete

$$\boxed{Sym^+ \equiv \text{matrici simmetriche definite positive}}$$

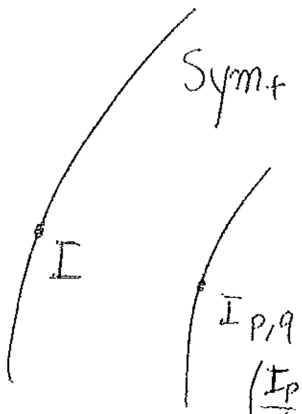
★ Geometricamente: $\quad Sym^+ = GL(n,\mathbb{R}) \circ I_n$

agisce per coniugata

$$GL(n,\mathbb{R}) \ni A \xrightarrow{M} M^T A M \in GL(n,\mathbb{R})$$

$\boxed{\text{Orbita di } I}$

$GL(n,\mathbb{R})$



$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \quad p+q=r=n$

[da Sylvester segue infatti che ogni matrice di Sym_+ è della forma $A = \underbrace{M^T M}_{= M^T \cdot I \cdot M}$ $\quad M \in GL(n,\mathbb{R})$]

in gen: # finito di orbite, etichettate da (p,q)

★★ Isotropia: $\quad O(n) \quad$ (mat. ortogonali)

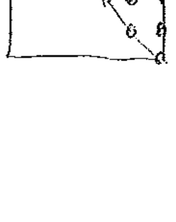
infatti $\quad \forall\, Q \in O(n) \quad Q^T Q = I$

(e viceversa, è esattamente la def. di matrice ortogonale)

$$\boxed{Sym^+_n = GL(n,\mathbb{R}) \big/ O(n,\mathbb{R})}$$

descrizione come spazio omogeneo G/H

$O(n,\mathbb{R})$ è chiuso in $GL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow$



$1+2+\dots n = \frac{(n+1)n}{2}$

Sym^+_n è Hausdorff

[è chiaro a priori poiché $Sym^+_n \underset{\text{lin}}{\approx} \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$]

★ Azioni proprie di gruppi di Lie su varietà

Sia data un'azione liscia di G (gruppo di Lie) su M (varietà):

$$\theta : G \times M \longrightarrow M$$
$$(g, m) \longmapsto \theta_g(m) \equiv g \cdot m$$

⚠ attenzione all'uso ambiguo della notazione "$\circ$"

(θ è liscia .. ovviamente $(g_1 g_2)\cdot m = g_1 \cdot (g_2 m)$

$$\theta_{g_1 g_2}(m) = \theta_{g_1}(\theta_{g_2}(m))$$
$$= \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} \quad)$$

★ L'azione è detta **propria** se l'applicazione

$$\Theta : G \times M \longrightarrow M \times M$$
$$(g, m) \longmapsto (\overset{\theta_g(m)}{g\cdot m}, m)$$
$$\Theta(g, m)$$

è propria

attenzione!

i.e. le preimmagini di compatti (in $M \times M$) sono compatte (in $G \times M$)

Notazione: se $K \subset M$, $g \cdot K = \{ g \cdot x \,/\, x \in K \subset M \}$

Prop. Sia G agente su M in modo continuo.
L'azione è propria $\iff$ $\forall$ $K \subset M$ compatto, l'insieme $G_K \subset G$ così definito
$$G_K := \{ g \in G : g \cdot K \cap K \neq \emptyset \} \text{ è compatto } (*)$$

($\Rightarrow$) Θ è propria. Ora $G_K = \{ g \in G \,/\, \exists\, p \in K$ t.c. $g \cdot p \in K \}$

Nota: Le azioni propriamente discontinue di un gruppo discreto Γ su M sono sussunte dalla definizione. Γ è infatti un gruppo di Lie di dim 0, munito della topologia discreta. La condizione $(*)$ è la condizione di finitezza già incontrata

$= \{ g \in G \ / \ \exists \, p \in M \text{ t.c. } \Theta(g,p) \in K \times K \}$

$= \pi_G \left(\Theta^{-1}(K \times K) \right)$ $\qquad \pi_G : G \times M \to G$, $(g, m) \mapsto g$

Se Θ è propria, dato che $K \times K \subset M \times M$ (proiezione su G) è compatto (Tychonov), $\Theta^{-1}(K \times K)$ è compatto, e lo è $G_K = \pi_G(\Theta^{-1}(K\times K))$ in quanto immagine continua di un compatto. $\boxed{G_K \text{ è compatto}}$

$\Leftarrow$ Sia G_K compatto $\forall K$.

Sia $L \subset M \times M$ compatto. Si ponga

$K = \pi_1(L) \cup \pi_2(L) \subset M$, K è compatto.

proiezioni

$$M \times M \to M$$
$$\pi_1 \quad (m_1, m_2) \mapsto m_1$$
$$\pi_2 \quad (m_1, m_2) \mapsto m_2$$

ora $\Theta^{-1}(L) \subset \Theta^{-1}(K \times K) \subset \{ (g,p) : g \cdot p \in K, \, p \in K \}$

$$\subset \underbrace{\underset{\text{compatto}}{G_K} \times \underset{\text{compatto}}{K}}_{\text{compatto}}$$

Ma $\Theta^{-1}(L)$ è chiusa
(L è compatto, dunque chiuso (Hausdorff))

e $\Theta^{-1}(L) \subset \underbrace{G_K \times K}_{\text{compatto}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Theta^{-1}(L) \text{ è compatto}}$
"chiuso in compatto = compatto"

$\square$

Lemma. Sia M una varietà, G gruppo di Lie, agente su M in modo continuo
acting on M continuously

L'azione è propria $\Leftrightarrow$ vale:

(*) $\boxed{\text{Sia } \{p_i\} \text{ convergente in } M, \text{ e } \{g_i\} \text{ tale che } \{g_i p_i\} \text{ convergente (in } M) \Rightarrow \exists \text{ sottosuccessione di } \{g_i\} \text{ convergente (in } G)}$

($\Rightarrow$) $\underset{\text{azione}}{\Theta}$ propria $(\Theta(g,p) = (gp, p))$

Siano date $\{p_i\}$ e $\{g_i\}$ $\quad p_i \to p$, $\quad g_i p_i \to q$

Siano $U \ni p$, $V \ni q$ precompatti (i.e. a chiusura compatta)
[esistono in ogni varietà...]

Allora, per i abbastanza grande, large enough, $\Theta(g_i, p_i) \in \underset{\text{compatto}}{\bar{U} \times \bar{V}}$

$\Rightarrow \exists$ s.s. convergente (stessa notazione) (Θ è propria)

$$(g_i, p_i) \longmapsto (g, p)$$

$\Rightarrow \boxed{g_i \to g}$

K è compatto per successioni se $\forall \{x_i\}$, $x_i \in K$, $\exists$ sottosuccessione $x_{i_j} \to x \in K$

Nota:
Su una varietà la compattezza per successioni è equivalente a quella di Heine-Pincherle Borel

($\Leftarrow$) valga (*) . Sia $L \subset M \times M$ compatto

Sia ora $\{(g_i, p_i)\}$ una successione qualsiasi in $\Theta^{-1}(L)$:

ovviamente $(g_i p_i, p_i) = \Theta(g_i, p_i) \in L$

$\Rightarrow$ passando eventualmente ad una sottosuccessione,

$(g_i p_i, p_i) \longmapsto (q, p)$

Ma allora, per (*), $g_i \longmapsto g$

e $(q, p) = (g \cdot p, p)$

i.e. $\{(g_i, p_i)\}$ ammette una sottosuccessione convergente in $G \times M$, ma, dato che $\Theta^{-1}(L)$ è chiuso in $G \times M$,
(compatto $\Rightarrow$ chiuso)

essa converge in $\Theta^{-1}(L)$. $\square$

Corollario: Ogni azione continua di un gruppo di Lie compatto su una varietà è propria

Dim. Nelle ipotesi (*), una sottosuccessione di $\{g_i\}$ converge, poiché G è compatto.

Conseguenza. Se $K = \{p\}$, $G_K = \{ g \mid g\cdot p = p \}$

gruppo di isotropia di p $\equiv G_p$

→ Allora, se G_p è compatto, l'azione è propria.

[Esempio di azione non propria: $\mathbb{R}^* = \{ t \in \mathbb{R}, \ t > 0 \}$

agisca su $\mathbb{R}^n$ così: $\underset{\mathbb{R}^+}{(t}, \underset{\mathbb{R}^n}{x)} \longmapsto \underset{\mathbb{R}^n}{t \cdot x}$

se $p = \underline{0}$, $G_p = \mathbb{R}^*$, che non è compatto]

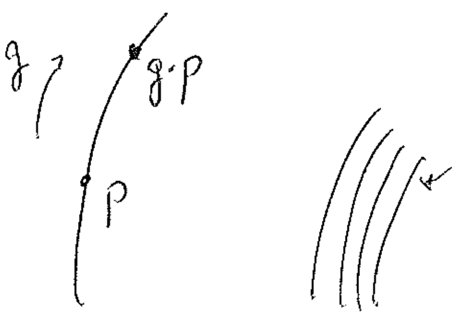
||| Se $\underset{\text{identità}}{G_p = \{e\}}$ $\forall p \in M$, l'azione è detta <u>libera</u>

"relazione di equivalenza orbitale" $\quad p \sim q$ se
orbit relation $\quad q = g \cdot p$ per qualche $g \in G$

(è eff. una relazione di equivalenza)

$[p] = G \cdot p = \{ g \cdot p \mid g \in G \}$

<u>orbita</u> <u>di</u> p



M/G ✱ spazio delle orbite
orbit space

elementi

azione <u>transitiva</u>: una sola orbita

$\equiv$ M G-<u>omogeneo</u>