Università degli Studi di Verona
Laurea in Matematica Applicata
Practice Test for Geometria – Aprile 2015

matricola:______________ cognome: ____________________________ nome: ____________________________

Scrivere subito matricola, nome e cognome e riconsegnare questo foglio al termine della prova.

1	2	3	4	Tot

(1) (a) Si forniscano le definizioni di *componenti connesse* e *componenti connesse per archi* di uno spazio topologico.
(b) Trovare le componenti connesse di $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey.
(c) Siano X e Y spazi topologici. Si dimostri che se X è connesso, allora $f(X)$ è contenuto in una componenente connessa di Y.
(d) Si dimostri che se $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ è un'applicazione continua rispetto alla topologia standard su $[0,1]$ e la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$, allora p è costante (cioè, $p(t) = c \;\forall\; t$ per qualche $c \in \mathbb{R}$).
(e) Trovare le componenti connesse per archi di $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey.

(2) (a) Siano X e Y spazi topologici. Si dimostri che se X è compatto, e $f : X \to Y$ è un'applicazione continua, allora $f(X)$ è compatto.
(b) Enunciare il teorema di Heine-Borel per $\mathbb{R}^n$.
(c) Si dimostri che lo spazio delle matrici ortogonali $O(3,\mathbb{R}) = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) | AA^T = I\}$ è compatto e disconnesso.

(3) Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare avente velocità unitaria ($\|\dot{\gamma}(s)\| = 1 \;\forall s$). Si supponga che la traccia $\gamma(\mathbb{R})$ sia contenuta nella sfera di raggio unitario centrata a $(0,0,0)$, ossia $\|\gamma(s)\| = 1 \;\forall s$.
(a) Si fornisca la definizione della curvatura $\kappa(s)$ di γ.
(b) Far vedere che $\langle \gamma(s), \dot{\gamma}(s) \rangle = 0$ per ogni s.
(c) Far vedere che $\langle \gamma(s), \ddot{\gamma}(s) \rangle + \langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle = 0$, e quindi $\langle \gamma(s), \ddot{\gamma}(s) \rangle = -1$.
(d) Concludere che $\kappa(s) \geq 1 \;\forall s$. (Suggerimento: $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \geq |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|$.)
(e) Per la stessa logica, dimostrare che una curva biregolare avente velocità unitaria e la traccia contenuta nella sfera di raggio R centrata a $(0,0,0)$ ha curvatura $\kappa(s) \geq \frac{1}{R}$.
(f) Se la traccia di γ è contenuta in una qualsiasi sfera di raggio R, è ancora vero che $\kappa(s) \geq \frac{1}{R}$?

(4) Si consideri la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin(t/2))$$

(a) Trovare la parametrizzazione canonica di γ avente l'origine in $\gamma(0)$ ed il verso delle t crescenti.
(b) Calcolare la curvatura κ di γ.
(c) Calcolare la torsione di γ.
(d) Trovare l'equazione del piano osculatore della curva $\gamma + 4\kappa\mathbf{N}$, ove $\mathbf{N}$ è il versore normale di γ.

Formule:

$$B(t) = \frac{\sigma' \times \sigma''}{\|\sigma' \times \sigma''\|} \qquad \kappa(t) = \frac{\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|}{\|\sigma'(t)\|^3} \qquad \tau(t) = \frac{\langle \sigma'(t) \times \sigma''(t), \sigma'''^{(t)} \rangle}{\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|^2}$$