Prova Parziale di Modelli Biologici Discreti

Docente: Dr Giuditta Franco

21 novembre 2013

1. **Definire cosa sono: una dinamica, un multinsieme e una relazione n-aria (su un insieme A).**

   Def (dinamica): Una funzione da un insieme di istanti temporali ad un insieme di stati (detto spazio delle fasi) di un sistema.

   Def (multinsieme su A): Una funzione (detta molteplicità) su A nei numeri naturali.

   Def (relazione n-aria su A): Un sottinsieme del prodotto cartesiano A^n.

2. **Sia data la relazione $R = \{(n, m) \mid n$ divide $m\}$ sull'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Si tratta di un ordinamento parziale? Ha un elemento massimo?**

   La relazione $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)(5, 5)(6, 6)(7, 7)\}$ è una **relazione d'ordine** perchè riflessiva, antisimmetrica, e transitiva. Infatti, $(a, a) \in R \quad \forall a \in (A)$, non vi appartengono coppie (a, b) e (b, a) con $a \neq b$, e $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$. È di **ordine parziale** (e non totale) perchè vi sono elementi non confrontabili (per esempio 3 e 7). Non ha un elemento massimo. Infatti, ha due massimali (i valori 4 e 6 sono massimali perchè si trovano sempre come seconda componente delle coppie dove compaiono) che non risultano confrontabili con tutti gli altri elementi (per esempio con 5).

3. **Scrivere tramite l'identità di Eulero le radici quarte di i e di -1. Localizzare sul piano le seste potenze delle radici di -1. È corretto dire che $e^{i\Pi}$ è un numero reale?**

   Le radici quarte di i sono le soluzioni $z = \rho e^{i\theta}$ dell'equazione $z^4 = i = e^{i\frac{\Pi}{2}}$. Pertanto, $\rho^4 e^{4i\theta} = e^{i\frac{\Pi}{2}} \Rightarrow \rho = 1$ e $4\theta = \frac{\Pi}{2} + 2k\Pi$ con $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \theta = \frac{\Pi}{8} + k\frac{\Pi}{2}$ con $k \in \mathbb{N}$. Si ottengono quattro radici distinte, per $k = 0, 1, 2, 3$, ovvero $z_1 = e^{i\frac{\Pi}{8}}, z_2 = e^{i\frac{5}{8}\Pi}, z_3 = e^{i\frac{9}{8}\Pi}, z_4 = e^{i\frac{13}{8}\Pi}$. Scritte tramite l'identità di Eulero diventano $z_1 = \cos\frac{\Pi}{8} + i\sin\frac{\Pi}{8}, z_2 = \cos\frac{5}{8}\Pi + i\sin\frac{5}{8}\Pi, z_3 = \cos\frac{9}{8}\Pi + i\sin\frac{9}{8}\Pi, z_4 = \cos\frac{13}{8}\Pi + i\sin\frac{13}{8}\Pi$.

   Analogamente, per le quarte radici di -1, abbiamo $\rho^4 e^{4i\theta} = e^{i\Pi} \Rightarrow \rho = 1$ e $4\theta = \Pi + 2k\Pi$ con $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \theta = \frac{\Pi}{4} + k\frac{\Pi}{2}$ con $k \in \mathbb{N}$. Le quattro radici distinte, per $k = 0, 1, 2, 3$, sono $y_1 = e^{i\frac{\Pi}{4}}, y_2 = e^{i\frac{3}{4}\Pi}, y_3 = e^{i\frac{5}{4}\Pi}, y_4 = e^{i\frac{7}{4}\Pi}$, ovvero $y_1 = \cos\frac{\Pi}{4} + i\sin\frac{\Pi}{4}, y_2 = \cos\frac{3}{4}\Pi + i\sin\frac{3}{4}\Pi, y_3 = \cos\frac{5}{4}\Pi + i\sin\frac{5}{4}\Pi, y_4 = \cos\frac{7}{4}\Pi + i\sin\frac{7}{4}\Pi$.

Tramite la formula di De Moivre, si verifica facilmente che la potenza sesta di y_1 e y_3 coincide con $-i$, mentre quella di y_2 e y_4 coincide con i, che si localizzano sul piano (ovvero sull'asse delle ordinate) come punti $(0,-1)$ e $(0,1)$, rispettivamente. Sì, è corretto dire che $e^{i\Pi} = -1$ è un numero reale.

4. **Dimostrare che ogni numero naturale maggiore di 1 può essere (univocamente) fattorizzato come prodotto di numeri primi.**

   Si può dimostrare per induzione (forte):

   Passo base (si applica al minimo valore per cui dimostriamo la proposizione P, $n = 2$).

   $P(2)$ è vera, perchè 2 è un numero primo.

   Passo induttivo: Assumiamo che $P(2), P(3), ..., P(n)$ siano vere, ovvero che $P(k)$ sia vero per ogni $k \leq n$, e dimostriamo $P(n+1)$.

   Se $n+1$ è un numero primo, P(n+1) è vera. Altrimenti, può essere fattorizzato come prodotto di due numeri h ed m, entrambi maggiori di 1 e minori di $n+1$, ottenendo $n+1 = hm$. Siccome $P(h)$ e $P(m)$ valogono per ipotesi induttiva (ovvero h ed m pu'o essere fattorizzato univocamente come prodotto di fattori primi), allora vale $P(n+1)$.

   Alternativamente, si può dimostrare per assurdo. Assumiamo che un numero n abbia due diverse fattorizzazioni in fattori primi: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_j^{\alpha_j} = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l}$. Dunque $\frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_j^{\alpha_j}}{q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l}} = 1$, che ridotto ai minimi termini porta a $p_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \dots p_{i_m}^{\gamma_{i_m}} = q_{s_1}^{\delta_{s_1}} \dots q_{s_t}^{\delta_{s_t}}$ con $\gamma_i \leq \alpha_i$ e $i \in \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, j\}$, e $\delta_s \leq \beta_s$ e $s \in \{s_1, \dots, s_t\} \subseteq \{1, \dots, l\}$, ogni p diverso da ogni q, con p e q primi.

   Ma allora, preso un p tra i numeri primi $p_{i_1}, \dots, p_{i_m}$, questo deve dividere il prodotto $q_{s_1}^{\delta_{s_1}} \dots q_{s_t}^{\delta_{s_t}}$, ovvero uno dei fattore primi q, tra $q_{s_1}, \dots, q_{s_t}$. Per definizione di numero q primo, p deve essere 1 oppure coincidere con q, che contraddice le nostre ipotesi.

5. **Cosa vuol dire risolvere un'istanza del problema della soddisfacibilità proposizionale 3-SAT(n,m)?**

   Vuol dire stabilire se è soddisfacibile (ovvero se esiste un assegnamento che la rende vera) una data formula proposizionale con n variabili, riducibile ad una congiunzione di m clausole, di cui ognuna disgiunzione di al più tre letterali.

   NB. Con assegnamento si intende una scelta di valori di verità per le n variabili booleane.

6. **Riportare il modello di "economia nazionale" in termini di equazione di ricorrenza sul prodotto interno - dire se esistono tecniche per risolverla.**

   Si vuole modellare la variazione del prodotto nazionale $Y(k)$ inteso come somma di consumi $C(k)$, investimenti $I(k)$, e tasse $G(k)$:

   $$Y(k) = C(k) + I(k) + G(k)$$

   Si osserva che si consuma solo una parte del guadagno, quindi si può assumere $C(k) = mY(k)$, con $0 < m < 1$ propensione marginale al consumo, e che si definisce investimento una grandezza legata alla variazione del prodotto interno (o capacità produttiva), ovvero vale $Y(k+1) - Y(k) = rI(k)$, con $r > 0$ tasso di crescita. Sostituendo nell'equazione sopra, si scrivono $C(k)$ e $I(k)$ in funzione di $Y(k)$, e si ottiene un modello malthusiano esteso $y(k+1) = ay(k) + b$, con $a > 1$ che dipende da r ed m, e b variabile del tempo:

$$Y(k+1) = [1 + r(1-m)]Y(k) - rG(k)$$

Esiste un teorema per risolvere tale equazione di ricorrenza lineare (non omogenea e a coefficienti non costanti), secondo cui le soluzioni sono date dalla somma di una soluzione particolare e le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

7. **Calcolare quanti (doppi) primers di DNA (di lunghezza 20) possiamo disegnare, che abbiano un prefisso e un suffisso (entrambi di lunghezza 5) composti da sole C o G.**

$$\frac{2^5 \cdot 4^{10} \cdot 2^5}{2} = 4^{10} \cdot 2^9$$

8. **Sia data una popolazione che evolve annualmente secondo l'equazione maltusiana $x(n+1) = 1.5 \cdot x(n) + m$, con m emigrazione annua costante. Partendo da una popolazione iniziale $x(0)$ di 10 milioni di individui, si chiede quale sarà il destino della popolazione (comportamento dinamico nel futuro: esplosione, estinzione, assestamento su un certo valore, maggiore o minore di quello iniziale), nei seguenti due casi:**

   (a) $\mathbf{m = -4}$ milioni? Essendo $10 > \frac{4}{0.5}$, la popolazione asintoticamente esplode.

   (b) $\mathbf{m = -5.5}$ milioni? Essendo $10 < \frac{5.5}{0.5}$, la popolazione si va ad estinguere per l'alto flusso migratorio in uscita, nonostante il fattore di crescita maggiore di 1.

   In generale, la dinamica si allontana dall'asintoto $-\frac{m}{0.5}$.

9. **Spiegare il modello "a ragnatela" della domanda-offerta, specificando perché si chiama così**.

   Si vuole individuare la funzione $p(k)$, prezzo di un bene nel tempo, affinché la domanda $d(k)$ del bene incontri l'offerta $s(k)$.

   Sia $d(k) = d_0 - ap(k)$ con $a > 0$ influenza positiva del prezzo sulla domanda, e $s(k+1) = s_0 + bp(k)$ dove $b > 0$ misura l'influenza (in negativo) del prezzo sulla produzione (futura) dell'offerta. Si tratta di risolvere l'equazione di ricorrenza (lineare, non omogenea): $ap(k+1)+bp(k) = d_0 - s_0$, con soluzione particolare $\frac{d_0-s_0}{a+b}$ e soluzione dell'omogenea associata $p(k) = A(-\frac{b}{a})^k$, dove $A = p(0) - \frac{d_0-s_0}{a+b}$.

   Il prezzo $p(k) = (p(0) - \frac{d_0-s_0}{a+b})(-\frac{b}{a})^k + \frac{d_0-s_0}{a+b}$ converge al punto fisso $\frac{d_0-s_0}{a+b}$ per $b < a$ (ovvero quando l'offerta è meno sensibile al prezzo della domanda), oscilla per $a = b$, e diverge altrimenti. Collegando passi consecutivi della funzione iterata del prezzo sulle rette della domanda e dell'offerta si disegna una ragnatela, da cui il nome del modello.

10. **Enunciare il teorema con cui abbiamo stabilito l'iperbolicità dei punti fissi della mappa logistica. Trovare il punto fisso della "tent map" $x(n+1) = \frac{1}{4}(1-2|x(n)-\frac{1}{2}|)$, e valutarne l'iperbolicità (ovvero dire se è attrattivo o repulsivo).**

    Teorema. Un punto fisso è attrattivo se il modulo della derivata dell'iterata, nel punto, è minore di 1, repulsivo se è maggiore di 1.

Per la tent map, si studiano le due equazioni di ricorrenza: $x(n{+}1) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(n) & x(n) \leq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2}(1 - x(n)) & x(n) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Imponendo $x(n+1) = x(n)$ si trova la soluzione nulla per la prima equazione, e $x(n) = \frac{1}{3}$ per la seconda, che non appartenendo al dominio di definizione non è soluzione valida. L'unico punto fisso della dinamica, lo zero, risulta attrattore (secondo il teorema sopra) perchè $|f'(0)| = \frac{1}{2} < 1$.