Equazioni differenziali ordinarie (EDO)

Diego Rigo

November 24, 2013

1 Introduzione

Che cos'è un'equazione differenziale? Non è altro che un'equazione (ossia un'uguaglianza) al cui interno compaiono funzioni e rispettive derivate. Sono degli strumenti molto utili in svariati campi di studio. Vediamone qualche esempio:

- *Fisica* : equaz di elasticità, del pendolo, eq di Newton in mezzi viscosi;
- *Biologia* : Modelli di popolazioni, preda-predatore, malattie;
- *Elettronica* : corrente alternata, condensatori, corrente a regime;
- *Fluidodinamica* : equaz di Navier-Stokes, turbolenza;
- *Geometria* : curve e torsioni, curvature, geodetiche;

Nonostante questa grande varietà di applicazioni, si tratta di equazioni tutt'altro che facili da risolvere. Per questo motivo, spesso si ricorre a tecniche di approssimazione numerica o studi qualitativi per la parziale risoluzione della stessa.

2 Equazioni differenziali ordinarie

Data $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \neq \emptyset$ aperto connesso, diciamo *equazione differenziale ordinaria* un'equazione del tipo:

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0$$

dove $x^{(i)}(t)$ è la derivata i-esima di $x(t)$ e diciamo *ordine* dell'equazione differenziale l'ordine della derivata più alta che compare nell'equazione.

Data un'equazione differenziale, diciamo *integrale particolare* (o anche *soluzione particolare*) una funzione $x(t)$ definita in Ω che soddisfa l'equazione differenziale, mentre diciamo *integrale generale* (o *soluzione generale*) l'insieme, o famiglia, di tutte le soluzioni dell'equazione.

Un'equazione differenziale di ordine n è detta in *forma normale* se è del tipo:

$$x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t))$$

cioè se è esplicitata rispetto alla n-esima derivata. Si dice *autonoma* se non compare esplicitamente la variabile indipendente.

3 Condizioni particolari

Un insieme di n vincoli che ci permettono di individuare una soluzione particolare dell'equazione differenziale è detto *condizione iniziale* se è dato in termini di un solo valore della variabile indipendente. Ad esempio:

$$\{x(t_0) = y_0 \quad , \quad x'(t_0) = y_1 \quad , \quad ... \quad , \quad y^{(n)}(t_0) = y_n\}$$

Chiamiamo *problema di Cauchy* il problema di determinare le soluzioni di un'equazione differenziale che soddisfa certe condizioni iniziali.

Diciamo invece *problema ai limiti* (o *problema al contorno*) se i vincoli sono dati su due differenti punti. In questo caso si parla di *condizioni di Dirichlet* se i vincoli sono dati sui valori della funzione, mentre si parla di *condizioni di Neumann* se i vincoli sono sui valori della derivata (altri tipi sono ad esempio combinazioni lineari delle due...)

4 Equazioni a variabili separabili

É detta *equazione a variabili separabili* un'equazione differenziale di forma:

$$y' = g(t)h(y) \qquad\qquad \text{con } f, g \text{ funzioni continue}$$

É immediato osservare che se $\bar{y}$ annulla $h(y)$ (ovvero $h(\bar{y}) = 0$), allora $y(t) = \bar{y}$ è soluzione dell'equazione (detta *soluzione singolare*). Altrimenti, se $h(y) \neq 0$:

$$\frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t) \quad \longrightarrow \quad \int \frac{1}{h(\eta)}\, d\eta = \int g(t)\, dt$$

e quindi, chiamando $H(y)$ una primitiva di $1/h(\eta)$ e $G(t)$ una primitiva di $g(t)$, possiamo risolvere questa equazione negli intervalli in cui H è invertibile:

$$H(y) = G(t) + C \quad \longrightarrow \quad y(t) = H^{-1}(G(t) + C)$$

5 Equazioni differenziali lineari

É detta *lineare* un'equazione differenziale del tipo:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t)$$

dove tutte le $a_0(t), ...a_{n-1}$ sono funzioni continue in un dato intervallo.
L'equazione si dice *omogenea* se $f(t) = 0$, altrimenti é detta *completa*

La risoluzione di un'equazione di questo tipo è piuttosto semplice, infatti:

- Le soluzioni dell'omogenea formano uno spazio vettoriale n-dimensionale (quindi ci basta trovarne n *linearmente indipendenti* e farne una combinazione lineare, per avere tutte le possibili soluzioni)
- Le soluzioni della completa sono date da $y = y_o + \bar{y}$ dove y_o e' l'insieme di tutte le soluzioni dell'omogenea, e $\bar{y}$ é una soluzione particolare della completa (spazio affine di dimensione n)

Quindi risolvendo entrambi questi sottoproblemi posso avere accesso ad una qualunque soluzione di una EDO lineare.

6 Equazione omogenea

Vogliamo trovare un modo per ricavare soluzioni dell'omogenea. Per far questo notiamo che le soluzioni $x_1(t), ..., x_n(t)$ dell'omogenea sono linearmente indipendenti se e solo se $\det W(t) \neq 0$ (dove $W(t)$ è il *wronskiano*).

In genere non è così facile ricavare queste soluzioni indipendenti, ma vediamo un caso in cui esiste un vero e proprio algoritmo per calcolarle

6.1 Equazione lineare a coefficienti costanti

Un'equazione lineare a coefficienti costanti è :

$$x^{(n)}(t) + c_{n-1}x^{(n-1)}(t) + ... + c_1 x'(t) + c_0 x(t) = 0$$

dove $c_0, ..., c_{n-1} \in \mathbb{R}$. Per la soluzione si scrive l'*equazione caratteristica*:

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_1\lambda + c_0 = 0$$

e si risolve questa, ricavando le n soluzioni in $\mathbb{C}$, quindi:

- Se $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ha molteplicità s, le soluzioni $\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, ..., t^{s-1}e^{\lambda_1 t}\}$ sono linearmente indipendenti
- Se $\lambda_i = c \pm id \in \mathbb{C}$ ha molteplicità s, l'insieme delle soluzioni $\{e^{ct}\cos(dt), te^{ct}\cos(dt), ..., t^{s-1}e^{ct}\cos(dt)\}$ e $\{e^{ct}\sin(dt), te^{ct}\sin(dt), ..., t^{s-1}e^{ct}\sin(dt)\}$ contengono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea

7 Soluzione particolare

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa.

- Se l'equazione é del tipo $Lx(t) = f_1(t) + f_2(t) + ... + f_n(t)$, ovvero con termine noto dato dalla somma di piu' termini, la soluzione $\bar{y}$ é la somma delle soluzioni di questi "sottoproblemi":

$$\begin{cases} Lx(t) = f_1(t) \longrightarrow \text{Soluz}: \ \bar{y_1} \\ Lx(t) = f_2(t) \longrightarrow \text{Soluz}: \ \bar{y_2} \\ ... \\ Lx(t) = f_n(t) \longrightarrow \text{Soluz}: \ \bar{y_n} \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad \bar{y} = \bar{y_1} + \bar{y_2} + ... + \bar{y_n}$$

In genere, se voglio ricavare una soluzione particolare della completa, ho bisogno delle n soluzioni dell'omogenea.

7.1 Metodo di variazione delle costanti arbitrarie

Cerchiamo una soluzione particolare della completa, di forma:

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + ... + c_n(t)x_n(t)$$

dove $\{x_1(t), ...x_n(t)\}$ sono le soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea, e $\{c_1(t), ...c_2(t)\}$ sono funzioni che si ricavano dal seguente sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ ... \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ f(t) \end{bmatrix}$$

dove la matrice altro non é che il wronskiano (percio' il sistema ha soluzione). Da questo sistema ricavo le derivate delle funzioni $c_j(t)$ che, opportunamente integrate, danno i $c_j(t)$ voluti.

PROBLEMA : spesso troppo laborioso!!

7.2 Metodo di somiglianza

É un metodo che puó essere usato solo nel caso di equazioni la cui omogenea é *a coefficienti costanti.* Se il termine noto é di forma:

$$f(x) = e^{sx}(A(x)cos(tx) + B(x)sin(tx))$$

con $A(x), B(x)$ polinomi di grado $\leq d$ e $s, t \in \mathbb{R}$, allora posso cercare soluzioni del tipo:

$$f(x) = t^{\mu}e^{sx}(C(x)cos(tx) + D(x)sin(tx))$$

con μ molteplicitá della soluzione $s+it$ del polinomio caratteristico dell'omogenea ($\mu = 0$ se $s + it$ non é soluzione)