Sistemi a due corpi: massa ridotta.

Proprietà dei sistemi dei sistemi di due particelle.

Vettore posizione $\mathbf{r}_{CM}$ del centro di massa in Oxyz (Sist. L)

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{r}_i + m_2\mathbf{r}_2) / (m_i + m_2)$$

N.B.: Relazioni fra i vettori posizione, velocità e accelerazione di un generico PM fra i due sistemi C e L:

$$\mathbf{r'}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{CM}; \qquad \mathbf{v'}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}; \qquad \mathbf{a'}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{CM}$$

Vettore posizione della particella $m_i$ in CMxyz (Sist. C)

$\mathbf{r'}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{CM} = m_2\, \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2)$ $\qquad$ $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$

$\mathbf{r'}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{CM} = m_1\, \mathbf{r}_{21}/(m_1+m_2)$ $\qquad$ $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

Vettore velocità della particella $m_i$ in C: $\mathbf{v'}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}$

$\mathbf{v'}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{CM} = m_2\, \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)$ $\qquad$ $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$

$\mathbf{v'}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{CM} = m_1\, \mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)$ $\qquad$ $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$

Vettore accelerazione della particella $m_i$ in C: $\mathbf{v'}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}$

$\mathbf{a'}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{CM} = m_2\, \mathbf{a}_{12}/(m_1+m_2)$ $\qquad$ $\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$

$\mathbf{a'}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{CM} = m_1\, \mathbf{a}_{21}/(m_1+m_2)$ $\qquad$ $\mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$

Se il sistema delle due particelle è isolato ($\mathbf{a}_{CM} = 0$), si ha:

$\mathbf{a'}_1 = \mathbf{a}_1 = m_2\, \mathbf{a}_{12}/(m_1+m_2)$ $\mathbf{a'}_2 = m_1\, \mathbf{a}_{21}/(m_1+m_2$

Equazioni del moto delle due particelle:

$$m_1\, \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12} \qquad\qquad m_2\, \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{21}$$

da cui: $\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12}/m_1$ e $\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{21}/m_2$ con ($\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$)

Moto relativo della particella 1 rispetto alla particella 2:

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}(1/m_1 + 1/m_2)$$

In termini di massa ridotta $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$.

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}/\mu$$

Equazione del <u>moto relativo</u> di 2 particelle, soggette unicamente alla loro mutua interazione (cioé che formano un sistema libero), in termini della loro massa ridotta si scrive:$\mu \mathbf{a}_{12} = \mathbf{F}_{12}$

Ora $\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a'}_1 - \mathbf{a'}_2 = \mathbf{a'}_{12}$ (perché sistema isolato).

Quindi sarà pure: $\mu \mathbf{a'}_{12} = \mathbf{F}_{12}$ (1)

Questa è l’equazione del moto di una particella di massa $\mu$ sotto l'azione di una forza $F_{12}$ in un SRI ancorato nel CM del sistema.

**N.B.**: Il moto relativo di due particelle nel sistema di riferimento L è equivalente al moto di una particella di massa $\mu$ che si muove sotto l'azione di una forza uguale alla forze di interazione mutua $\mathbf{F}_{12}$ rispetto al sistema C (che è un sistema di riferimento inerziale!)

N.B.: Essendo il sistema isolato le grandezze dinamiche quantità di moto totale e il momento angolare totale del sistema dei due corpi si conserveranno, indipendentemente dal sistema di riferimento scelto (sia esso L o C).

Calcolo delle grandezze dinamiche collettive per un sistema a due corpi relative nel sistema di riferimento C.

Quantità di moto totale $\mathbf{P'}_S$ nel sistema C:

$$\mathbf{P'}_S = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{p}'_1 = m_1\mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{p}'_2 = m_2\mathbf{v}'_2$, e ricordando che $\mathbf{v}'_1 = m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)$ e $\mathbf{v}'_2 = m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)$, si avrà anche:

$$\mathbf{p}'_1 = m_1\mathbf{v}'_1 = m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] = \mu\,\mathbf{v}_{12}$$
$$\mathbf{p}'_2 = m_2\mathbf{v}'_2 = m_2[m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)] = \mu\,\mathbf{v}_{21} = -\mu\,\mathbf{v}_{12}.$$

e quindi:

$$\mathbf{P}'_S = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mu\,\mathbf{v}_{12} - \mu\,\mathbf{v}_{21} = \mathbf{0},$$

Energia cinetica interna di un sistema di 2 particelle:

$$E_k^{INT} = \tfrac{1}{2}\mu\, v_{12}^2 = p'^2/2\mu.$$

dove: $p' = p'_1 = p'_2 = \mu\, v_{12}$

Infatti: $E_{k,}^{INT} = ½\, m_1\, v'^{2}_{1} + ½\, m_2\, v'^{2}_{2}$
$= ½\, m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)]^2 + ½\, m_2\, [m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)]^2 =$
$= ½\, m_1 m_2^2\, \mathbf{v}_{12}^{2}/(m_1+m_2)^2 + ½\, m2m^{12}\, \mathbf{v}_{21}^{2}/(m_1+m_2)^2 =$
$= ½\, m_1 m_2\, (m_1+m_2)\, \mathbf{v}_{12}^{2}/(m_1+m_2)^2 = ½\, m_1 m_2\, \mathbf{v}_{12}^{2}/(m_1+m_2) =$
$= ½\, \mu\, \mathbf{v}_{12}^{2}$

Momento angolare interno o intrinseco del sistema:

$$\mathbf{L}_{CM}^{INT} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\, \mathbf{v}_{12}.$$

Infatti:
$\mathbf{L}_{CM}^{INT} = \mathbf{r'}_1 \wedge m_1\mathbf{v'}_1 + \mathbf{r'}_2 \wedge m_2\mathbf{v'}_2 =$
$= \mathbf{r'}_1 \wedge m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] + \mathbf{r'}_2 \wedge m_2\, [m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)] =$
$= \mathbf{r'}_1 \wedge m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] + \mathbf{r'}_2 \wedge m_2\, [-\, m_1\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] =$
$= \mathbf{r'}_1 \wedge m_1 m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2) - \mathbf{r'}_2 \wedge m_1 m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)$
$= (\mathbf{r'}_1 - \mathbf{r'}_2) \wedge [m_1 m_2/(m_1+m_2)\, \mathbf{v}_{12} =$
$= \mathbf{r'}_{12} \wedge \mu\, \mathbf{v}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\, \mathbf{v}_{12}$ $\quad [\mathbf{r'}_{12} = \mathbf{r'}_1 - \mathbf{r'}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{12}]$

Teoremi di Konig per un sistema isolato a due corpi,
con velocità $\mathbf{v}_{CM}$ costante:

Usando le grandezze calcolate nel sistema C si avrà:

$\mathbf{P}_S = M\, \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P'}_S = M\, \mathbf{v}_{CM}$
$E_{k,S} = E_{k,CM} + E_k^{INT} = ½\, Mv_{CM}^{2} + ½\, \mu\, v_{12}^{2} =$
$\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{L}_{O,CM} + \mathbf{L}_{CM}^{INT} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\, \mathbf{v}_{12}$

Esempio: caso del manubrio costituito da 2 corpi puntiformi collegati da un'asta rigida lunga L e priva di massa: calcolo della tensione della asta:

$$T = \mu\, v_{12}^2/r_{12} = \mu\, v_{12}^2/L.$$

Cosa succede quando $m_1 << m_2$ (atomo di idrogeno: massa elettrone << massa protone; sistema terra–luna: massa luna << massa terra; etc.)

La massa ridotta di un tal sistema diventa:

$$\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2) = m_1/(m_1/m_2+1) \cong m_1$$

e il moto relativo delle due particelle descritto dall’equazione 1 (v. più sopra) si riduce a:

$$m_1\, \mathbf{a'}_{12} = \mathbf{F}_{12}$$