Serie di Fourier

prof. Sergio Zoccante

27 gennaio 2011

1 Le serie di Fourier

Gli sviluppi in serie di Taylor hanno applicazioni numerosissime. Tuttavia, le condizioni alle quali una funzione deve soddisfare sono pesanti: saranno sviluppabili in serie di Taylor solo *funzioni infinitamente derivabili*, e neppure tutte, come già osservato. Quindi, se si ha la necessità di lavorare con *funzioni poco regolari*, bisogna ricorrere ad altri sviluppi in serie che non utilizzino le potenze. Si deve a J. Fourier lo sviluppo di tali funzioni in serie di seni e coseni (1822, *Theorie analytique de la chaleur*).
L'esame del problema che ha dato inizio alla teoria, e cioè la ricerca delle più generali soluzioni di un'equazione differenziale del secondo ordine, ci porterebbe troppo lontano.
Partiamo allora dall'osservazione che la somma di due (o più) funzioni sinusoidali, cioè del tipo $Asin(\omega x+\phi)$, dà origine a funzioni dall'andamento assai diverso da quello dei singoli addendi. La funzione somma tuttavia è ancora una funzione periodica, se il rapporto tra i due periodi è *razionale*. Si veda ad esempio la fig. 1, che mostra il grafico della funzione $f(x) = sin(6x)+sin(7x)$.

Se allora una somma di due funzioni sinusoidali fornisce una funzione periodica così diversa, si può cercare di esprimere *una qualsiasi funzione periodica come somma di funzioni sinusoidali*.

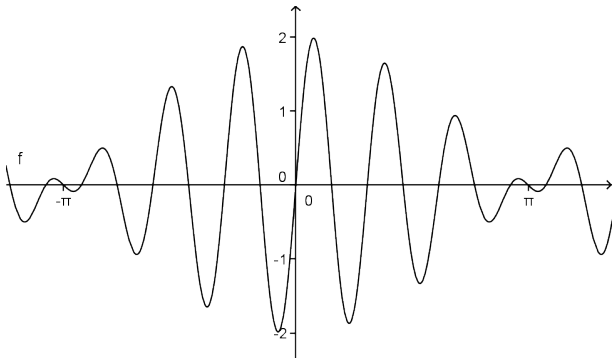

Figura 1: La somma di due funzioni sinusoidali

1.1 Lo sviluppo in serie

Fourier trova che, sotto condizioni molto ampie, una funzione f periodica di periodo 2π si può sviluppare nella serie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k cos(kx) + b_k sin(kx)], \tag{1}$$

dove i coefficienti a_k e b_k, detti *coefficienti di Fourier*, sono determinati dalle relazioni

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx \tag{2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)dx. \tag{3}$$

Ciò deriva da quanto segue:

1. le funzioni $cos(kx)$ e $sin(kx)$ soddisfano le relazioni seguenti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)cos(hx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq h \\ \pi & \text{se } k = h \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } k = h = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)sin(hx)dx = 0 \tag{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin(kx)sin(hx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq h \text{ o se } k = h = 0 \\ \pi & \text{se } k = h \neq 0 \end{cases}$$

Se interpretiamo l'insieme delle funzioni definite su un intervallo di ampiezza un periodo, ad esempio $[-\pi, \pi]$, come uno spazio vettoriale, e consideriamo l'integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

come *prodotto scalare*[1] delle due funzioni f e g, le relazioni 4 esprimono *la mutua ortogonalità* delle funzioni $cos(kx)$ e $sin(hx)$: alternando coseni e seni, al variare dei naturali h e k si ottengono due *successioni di funzioni linearmente indipendenti*.
Lo sviluppo in serie di una funzione può allora essere visto come *combinazione lineare* di elementi di queste successioni. Restano da calcolare i coefficienti a_k e b_k di questa combinazione.

2. I coefficienti a_k si calcolano moltiplicando *scalarmente* per $cos(hx)$ tutti i termini della relazione 1, ottenendo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(hx)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cos(hx)dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)cos(hx)dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi} sin(kx)cos(hx)dx]$$

in cui abbiamo supposto di poter scambiare le operazioni di seriazione e di integrazione, cosa possibile ad esempio sotto la condizione di convergenza uniforme.
A secondo membro, tutti gli integrali risultano nulli per le relazioni 4, ad eccezione dell'integrale di $cos(kx)cos(hx)$ nel caso in cui $k = h$; da questo si ha il risultato voluto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx = a_k\pi.$$

Da notare che questa formula definisce, per $k = 0$, il coefficiente

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

[1] con una certa semplificazione; ma le idee principali sono quelle qui esposte

e quindi il termine iniziale $a_0/2$ è la *media integrale* di f.
Analogamente, moltiplicando scalarmente la 1 per $sin(hx)$ si ottengono i coefficienti b_k:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)dx = b_k\pi.$$

.

Osservazioni

1. Si noti che, data l'ipotesi di periodicità della f, gli integrali possono essere calcolati su qualsiasi intervallo di ampiezza 2π; di solito si sceglie $[-\pi, +\pi]$. La funzione così calcolata viene poi estesa per periodicità.

2. Se la funzione f di cui si vuole la serie è pari, allora i coefficienti b_k sono tutti nulli, perché integrali della funzione $f(x)sin(kx)$, che è dispari; la funzione risulta sviluppata in somma di soli coseni. Analogamente, se f è dispari risultano tutti nulli i coefficienti a_k.
Quale esempio, si consideri la funzione *onda quadra*, definita uguale a 1 nell'intervallo $[-\pi/2, +\pi/2]$, e 0 negli altri punti di $[-\pi, +\pi]$. Si tratta di una funzione pari, per cui i coefficienti b_k sono tutti nulli, mentre semplici calcoli danno $a_0 = 1$, e

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1cos(kx)dx =$$
$$= \left[\frac{sin(kx)}{k}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{k}sin(k\frac{\pi}{2}),$$

che portano a $a_k = 0$ se k è pari e diverso da 0, $a_k = \frac{2}{k\pi}$ se k è congruo a 1 (mod 4), e $a_k = -\frac{2}{k\pi}$ se k è congruo a 3 (mod 4).

Nel nostro caso otteniamo

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}cos(x) - \frac{2}{3\pi}cos(3x) + \frac{2}{5\pi}cos(5x) - \frac{2}{7\pi}cos(7x) + \frac{2}{9\pi}cos(9x)...$$

In figura, i grafici dell'onda quadra e del suo sviluppo fino al quinto termine.

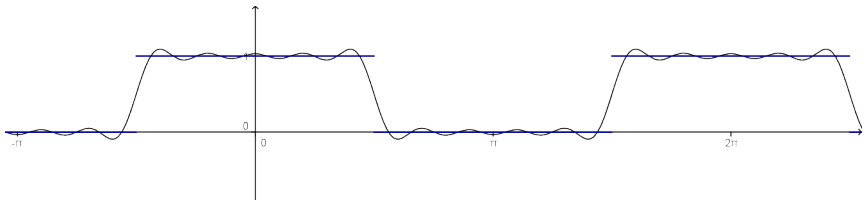

Figura 2: Onda quadra e sua approssimazione con sviluppo di Fourier

1.2 Convergenza delle serie di Fourier

Naturalmente, come capita per gli sviluppi in serie di Taylor, dobbiamo chiederci sotto quali condizioni la serie di Fourier converge alla funzione di cui è sviluppo. Per questo dobbiamo premettere la seguente

Definizione 1.1 *Una funzione f è detta* continua a tratti *in un intervallo $[a, b]$ se è continua in tale intervallo, eccetto al più in un numero finito di punti, nei quali però ammette sia limite destro, sia limite sinistro.*
Una funzione continua a tratti è detta regolare a tratti *se è derivabile, eccetto al più in un numero finito di punti, e se ha derivata continua e limitata - dove questa esiste.*

Enunciamo ora un primo risultato, rinviando i lettori a [GIUSTI 2002, cap.14] per la dimostrazione ed ulteriori approfondimenti.

Teorema 1.1 *Sia f una funzione periodica di periodo 2π e regolare a tratti. Allora la sua serie di Fourier*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k cos(kx) + b_k sin(kx)]$$

converge puntualmente *a f nei punti in cui f è continua, mentre nei punti in cui è discontinua* converge alla media aritmetica dei limiti *destro e sinistro.*

Balza subito all'attenzione che l'ambito di applicazione è molto più ampio rispetto alla serie di Taylor, potendosi approssimare funzioni non solo discontinue, ma anche non derivabili (in un numero finito di punti).

Se poi si considerano funzioni continue, abbiamo un risultato più forte:

Teorema 1.2 *Sia f una funzione periodica, regolare a tratti e continua. Allora la sua serie di Fourier converge totalmente, e quindi uniformemente, alla funzione f.*

Osservazioni

1. Le applicazioni tecnologiche della teoria di Fourier e delle sue derivazioni sono innumerevoli, perché innumerevoli sono i fenomeni che presentano periodicità. Si pensi, quale caso emblematico, al suono. Molti metodi di analisi digitale del suono, e della conseguente codifica, tendono ad individuare le *armoniche principali*, che poi altro non sono che (alcuni) termini dello sviluppo in serie di Fourier; in certi casi, tra queste vengono codificate solo quelle percepibili dall'orecchio umano, in modo da ridurre la quantità di informazione che è necessario memorizzare.

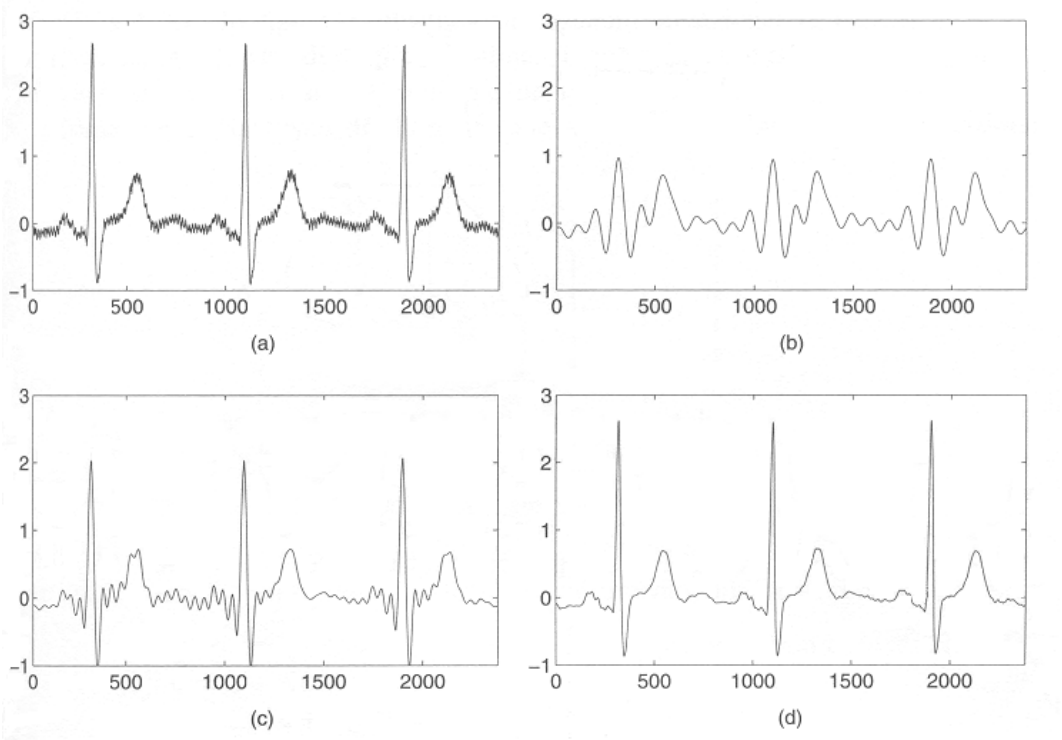

Figura 3: Elettrocardiogramma e sue approssimazioni con sviluppi di Fourier

2. Naturalmente, nelle applicazioni pratiche non si usa l'intera serie di Fourier, ma solo un numero finito di addendi, sufficienti allo scopo che ci si prefigge.

Si consideri ad esempio la fig. 3 [VILLANI 2007]. In (a) è riprodotto il tracciato originario di un elettrocardiogramma, mentre in (b), (c) e (d) sono riprodotte tre sue approssimazioni, ottenute troncando la corrispondente serie di Fourier rispettivamente a 51 addendi (termine iniziale, più 25 seni e 25 coseni), 101 addendi e 201 addendi. Si noti come sia necessario usare un numero piuttosto elevato di addendi per avere una buona approssimazione. In questo caso ciò è dovuto alla presenza di un picco molto alto e con una *base* piuttosto stretta: per approssimarlo, bisogna avere onde con frequenza elevata, e poiché nelle formule 1 la frequenza dipende da k, ciò significa dover utilizzare molti termini dello sviluppo.
Ovviamente non sempre è così: se la funzione è più "regolare" di norma è sufficiente un numero minore di addendi per avere un risultato adeguato.

Riferimenti bibliografici

[EULERO 1748] L. Eulero: *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne (1748)

[GIUSTI 2002] E. Giusti: *Analisi matematica 1*, Bollati Boringhieri Torino (2002)

[VILLANI 2007] V. Villani: *Matematica per discipline bio-mediche*, McGraw-Hill, Milano (2007)