Più rapidamente: $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$ mostra che f è un'applicazione chiusa (manda cioè chiusi in chiusi) e, essendo bigettiva, aperta (ossia manda aperti in aperti); pertanto, f è un omeomorfismo (v. Lezione II)

Esempi
- In $\mathbb{R}^n$, si consideri $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$:

$B_\delta(x_0)$ non è compatta (infatti non è chiusa, anche se è limitata).
Si osservi che

$$\mathcal{U} = \{ \underbrace{B_{\delta'}(x_0)}_{\mathcal{U}_{\delta'}} \}_{0<\delta'<\delta}$$ fornisce un ricoprimento aperto di $B_\delta(x_0)$ da cui non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento finito.

- S^n, $n \geq 0$ $\left(S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \right)$
Sfera unitaria in $\mathbb{R}^{n+1}$

è compatta

- $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ $(n \geq 0)$ (Spazio proiettivo reale n-dimensionale)

è compatto (la mappa antipodale naturale $f : S^n \to \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ è continua e suriettiva)

- $\mathbb{T}^n := S^1 \times S^1 \times \dots S^1$ è compatto

toro n-dimensionale (per il teorema di Tychonoff: un prodotto(+) di spazi topologici compatti (munito della topologia prodotto) è compatto.

(+) arbitrario

 NUOVA