$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ $\forall r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \ \exists q \in \mathbb{Q} \quad r \cdot q = 1$

$r = [(a,b)]$ $q = [(b,a)]$

$1 = [(1,1)]$

$r \cdot q \quad [(a \cdot b), (b \cdot a)] = [(1,1)]$

$\forall r \in \mathbb{Q} \ \exists q \in \mathbb{Q} \quad r + q = 0$

$\mathbb{R}$

PARTIZIONE

$\mathcal{G}$ di A è una FAMIGLIA di sott. di A

$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(A)$

1) $\forall X \in \mathcal{G} \quad X \neq \emptyset$
2) $\forall X, Y \in \mathcal{G} \quad X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$
3) $\displaystyle\bigcup_{X \in \mathcal{G}} X = A$

Esercizio

A, $\sim \subseteq A \times A$ di equiv.

$A/\sim$ è una PART. di A

ESERCIZIO

A, $\sim\ \subseteq A \times A$ di equiv.

$A/\sim$ è una PART. di A

$A/\sim\ \subseteq \mathcal{P}(A)$

$\forall X \in A/\sim \quad X \neq \emptyset$ ✓

$\forall X, Y \quad X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$

$\bigcup_{X \in A/\sim} X = A$

1) $\underbrace{\bigcup_{X \in A/\sim} X}_{\mathcal{U}} \subseteq A$

$z \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists a \; z \in [a] \subseteq A$

$z \in A \Rightarrow [z] \in A/\sim \Rightarrow z \in \mathcal{U}$

$$\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}_{\mathbb{Z}^2}$$

$$\forall r \in \mathbb{Z} \quad \left(X_r = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x+y = r\} \right)$$

$$\mathcal{Y} = \{ X_r \mid r \in \mathbb{Z} \}$$

1) $\forall A \in \mathcal{Y} \quad A \neq \emptyset$

2) $\forall A, B \in \mathcal{Y} \quad A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

$A = X_r \qquad B = X_q$

$A \neq B \Rightarrow r \neq q \; \ldots \Rightarrow X_r \cap X_q = \emptyset$

PER ASSURDO CHE $X_r \cap X_q \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow \exists (a,b) \text{ t.c. } (a,b) \in X_r \;\&\; (a,b) \in X_q \Rightarrow \\ \Rightarrow a+b = r \;\&\; a+b = q \quad \text{ASSURDO !!} \end{array}}$$

$$\bigcup_{A \in \mathcal{Y}} A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \qquad \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} X_r = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$(a,b) \in X_{a+b}$

TEOREMA $\quad A \quad$ 1) $\sim \subseteq A \times A$ è di equiv $\Rightarrow$

$A/\sim$ è una part di A

2) $\mathcal{G}$ sia una partizione di A

$$\approx \subseteq A \times A \quad (a,b) \in \approx \iff \exists X \in \mathcal{G} \; a,b \in X$$

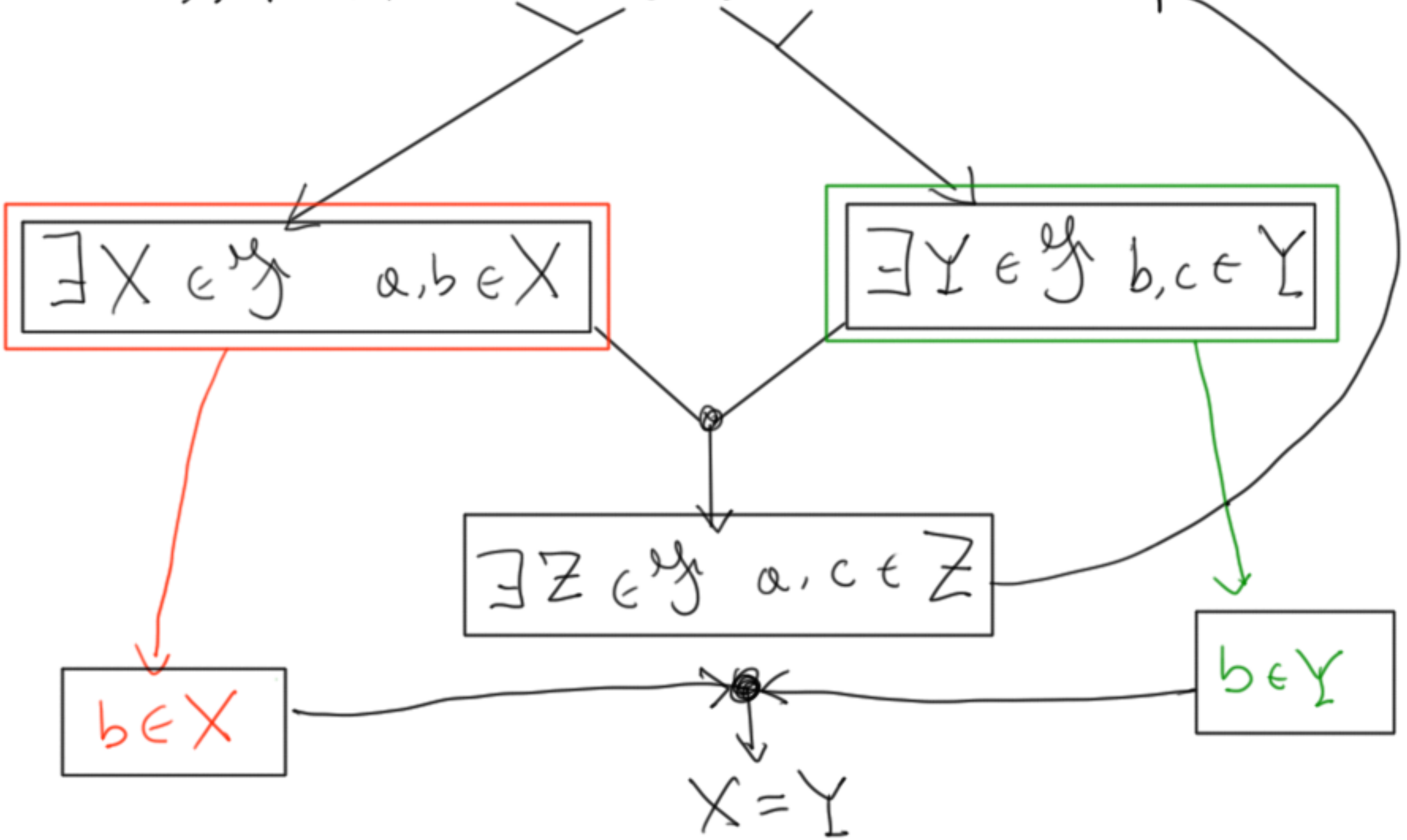
ALLORA $\approx$ è una relaz. di equiv.

1) $\forall a \in A \quad a \approx a \iff \underbrace{\exists X \in \mathcal{G} \;\; a \in X} \quad \bigcup_{X \in \mathcal{G}} X = A$

2) $\forall a, b \quad a \approx b \Rightarrow b \approx a$ imm.

3) $\forall a, b, c \quad a \approx b \;\&\; b \approx c \Rightarrow a \approx c$

3) $\forall a, b, c \quad a \approx b \;\&\; b \approx c \Rightarrow a \approx c$



$a, \in X \quad , c \in Y \Rightarrow a, c \in X$

	VERO	FALSO
1) A è una partizione di A		X
2) $\{A\}$ è una partizione di A	X	

$$\mathbb{N} \qquad \mathcal{Y} = \{ X_n \mid n \in \mathbb{N} \ \ X_n = \{n\} \}$$

$\mathcal{Y}$ È UNA PARTIZIONE? SI

$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\mathbb{N}$

$x \sim y \iff x = y$ oppure x, y sono pari

$$\mathbb{N}/_{\sim} = \{ [n]_{\sim} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$$\mathbb{N}/_{\sim} = \left\{ B_n \;\middle|\; \begin{array}{l} B_n = \text{Pari se } n \text{ è pari} \\ B_n = \{n\} \text{ se } n \text{ è disp.} \end{array} \right\}$$

$$\mathbb{N}/\sim \;= \{ \text{PARI}, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \dots \}$$