Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

Analisi Matematica I: foglio di esercizi n. 4

9 dicembre 2015

Risolvere i seguenti problemi. Da consegnare entro il 18/12.

Pb 1. Si consideri la funzione $f(x) = \log(2x) - \arctan(x-3)$. Si dimostri che si annulla in un unico punto compreso tra 0 e 1/2, la si studi e se ne tracci il grafico (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

Pb 2. Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 - x^2}{\sin^2(x^3)},$$
$$\lim_{x\to +\infty} \sin\left(\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+\sin(1/x)}}\right),$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log^2(1+x) - \log(1+x^2)}{\log(1+x^3)}.$$

Pb 3. Si dimostri che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \textit{se } x > 0, \\ 0 & \textit{se } x \le 0, \end{cases}$$

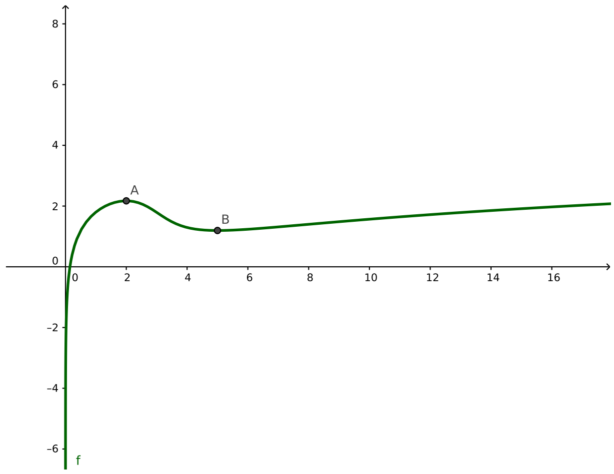
è derivabile 3 volte in 0 e si calcolino $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$. Che dire delle derivate successive?

Soluzioni:

Pb 1. La funzione data è definita per $x > 0$, tende a $-\infty$ per $x \to 0^+$ e a $+\infty$ per $x \to +\infty$. La derivata è

$$f'(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x(1 + (x-3)^2)},$$

che si annulla per $x = 2$ e $x = 5$: il primo di questi è un punto di massimo, il secondo di minimo. Sull'intervallo $(0, 1/2)$ la funzione è strettamente crescente: per quanto osservato sopra sul limite per $x \to 0^+$ e tenendo conto del fatto che $f(1/2) > 0$, la funzione si annulla una sola volta in quell'intervallo. Mettendo assieme le informazioni raccolte, il grafico della funzione è come in figura:



Pb 2. Primo limite: lo sviluppo di Taylor del numeratore è $-x^6/6 + o(x^6)$, quello del denominatore $x^6 + o(x^6)$: il limite vale $-1/6$.

Nel secondo limite, l'argomento del seno (entro le parentesi tonde grandi) tende a $+\infty$: il limite richiesto non esiste.

Nel terzo limite, basta usare lo sviluppo di Taylor del lograritmo. Il numeratore è $-x^3 + o(x^3)$, mentre il denominatore è $x^3 + o(x^3)$: il limite richiesto vale 1.

Pb 3. Per $x < 0$ la funzione ha tutte le derivate nulle, per $x > 0$ si possono scrivere esplicitamente $f'(x)$, $f''(x)$ e $f'''(x)$, ottenendo delle funzioni che tendono a 0 per $x \to 0^+$.

Ricordo il seguente risultato, che è immediata conseguenza della definizione di derivata e della regola di l'Hôpital: se f è continua in 0, è derivabile per $x \neq 0$ e si ha $\lim_{x\to 0} f'(x) = \ell$, allora f è derivabile in 0 con $f'(0) = \ell$.

Poichè la funzione f è continua per $x = 0$, se ne deduce allora che $f'(0)$ esiste e vale 0. A questo punto, abbiamo che anche $f'(x)$ è continua in 0, da cui $f''(0) = 0$. Ma allora $f''(x)$ è continua in 0 e $f'''(0) = 0$.

Anche le derivate successive sono tutte nulle per $x = 0$: dai calcoli precedenti si indovina infatti facilmente che per $x > 0$ si ha

$$f^{(k)}(x) = e^{-1/x} \frac{P_k(x)}{x^{2k}},$$

ove $P_k(x)$ è un polinomio dipendente da $k = 1, 2, 3, \ldots$ Una volta provato per induzione che questa espressione è corretta, basta osservare che $f^{(k)}(x) \to 0$ per $x \to 0$: il ragionamento impiegato sopra ci dice che f è derivabile tutte le volte che si vuole in 0, e che tutte le sue derivate si annullano in quel punto.