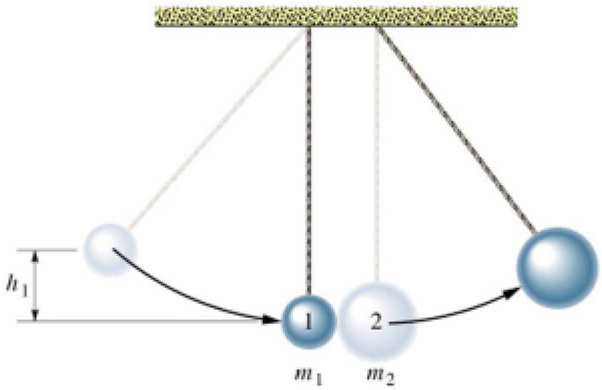
Esercizi Quantità di moto ed Urti

1. (**Esame Luglio 2014**) Due sfere metalliche, sospese a cavetti verticali, sono inizialmente a contatto. La sfera 1, con massa m_1=30 g, viene lasciata libera dopo essere stata tirata verso sinistra fino all'altezza h_1=8 cm. Ritornata, cadendo, alla posizione iniziale, subisce un urto elastico contro la sfera 2, di massa m_2=75 g. Qual'è la velocità della sfera 1 subito dopo l'urto?



Soluzione:

Divido il problema in due parti:
1) Discesa della sfera 1 (conservazione dell'energia meccanica):

$$E_{mecc,i} = E_{mecc,f}$$

$$K_{1,i} + U_{1,i} = K_{1,f} + U_{1,f}$$

$$0 + m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0$$

$$v_{1,i} = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2(9.8m/s^2)(0.080m)} = 1.252\ m/s$$

2) Urto fra le due sfere (conservazione della quantità di moto):

$$m_1 v_{1,i} + \cancel{m_2 v_{2,i}} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \cancel{\frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2} = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2$$

sfera 1 torna indietro dopo urto

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} = \frac{0.030\,kg - 0.075\,kg}{0.030\,kg + 0.075\,kg} 1.252 m/s = -0.537 m/s$$

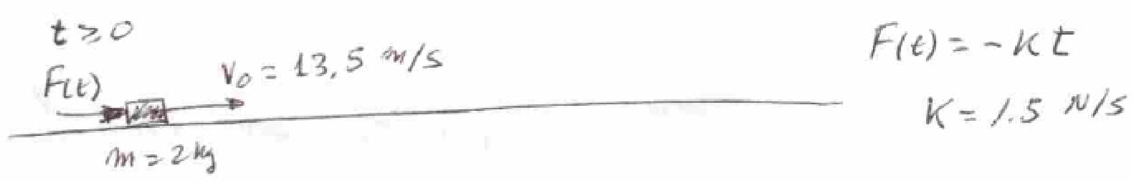
$m_1.V_{1i} = m_1.V_{1f} + m_2.V_{2f}$
$V_{2f} = (m_1/m_2)(V_{1i} - v_{1f})$

Questo in:

$m_1.(V_{1i})^2 = m_1.(V_{1f})^2 + m_2.(V_{2f})^2$
$m_1.(V_{1i}{}^2 - V_{1f}{}^2) = m_2.[(m_1/m_2)(V_{1i} - v_{1f})]^2$
$m_1.(V_{1i} - V_{1f}).(V_{1i} + V_{1f}) = (m_1{}^2/m_2).(V_{1i} - v_{1f})^2$
$m_2.(V_{1i} - V_{1f}).(V_{1i} + V_{1f}) = m_1.(V_{1i} - v_{1f})^2$
$m_2.(V_{1i} + V_{1f}) = m_1.(V_{1i} - v_{1f})$
$V_{1i}.(m_1 - m_2) = V_{1f}.(m_1 + m_2)$
$V_{1f} = [(m_1 - m_2)/ (m_1 + m_2)]. V_{1i}$

2. (**Esame Giugno 2007**) Un corpo di massa m = 2 kg, inizialmente in moto uniforme con velocità $\mathbf{V}_0$ = 13.5 m/s **i** su una guida rettilinea orizzontale liscia, viene sottoposto a partire dall'istante t = 0 ad una forza di intensità variabile linearmente nel tempo e diretta costantemente lungo la guida secondo la legge **F**(t) = −kt **i** , con k = 1.5 N/s. Calcolare:
   a) la quantità di moto **p** del corpo all'istante τ = 6 s;
   b) il lavoro compiuto dalla forza in corrispondenza allo spostamento del corpo durante l'intervallo (0, τ).

Soluzione:



a) $P(\tau) = m.V(\tau)$
   m = 2 Kg
   τ = 6 s
   $V(\tau)$ = ?
   $$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{m \cdot \mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{a}$$
   Quindi:
   $P(t) = \int F(t).dt = \int -Kt.dt = -Kt^2/2 + C$
   Sappiamo che:
   $P(0) = m.V_o = 2\ Kg.\ 13{,}5\ m/s^2 = 27 = -Kt^2/2 + C$

$\Rightarrow C = 27$
$P(t) = 27 - 1{,}5 \, . \, t^2/2$
$P(6) = 0$ kg.m/s^2 (Il corpo si ferma)

b) Il lavoro è definito come:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt$$

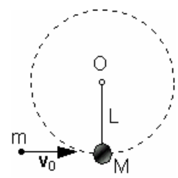
Nel nostro caso Forza ed spostamento e velocità sono nella stessa direzione orizzontale.

$F(t) = -kt = m.a(t) = m.dV(t)/dt$
$V(t) = (1/m).\int -kt.dt$
$V(t) = -3.t^2/8 + C_1$
$m = 2$Kg e $V(0) = 13{,}5 \rightarrow C_1 = 13{,}5$
$V(t) = -3.t^2/8 + 13{,}5$

$dL = F(t).V(t).dt$
$dL = \int(-k.t).\,(-3.t^2/8 + 13{,}5).dt$
$dL = k.\int(3.t^3/8 \;- 13{,}5.t)dt = k.(3.t^4/32 - 13{,}5.t^2/2) + C_2$

$\Delta L = L(6) - L(0) = k.(3.6^4/32 \;- 13{,}5.6^2/2)$
$\Delta L = 1{,}5.(121{,}5 - 243) = -182{,}25$ J

3. (**Esame Giugno 2007**) Un proiettile di massa $m = 0.1$ kg sparato da un fucile impatta con velocità V_0 diretta orizzontalmente contro un pendolo di massa $M = 0.9$ kg conficcandosi istantaneamente in esso. Assumendo che la massa M sia appesa all'estremità libera di un filo ideale di lunghezza $L = 0.8$ m avente l'altra estremità imperniata ad un punto fisso O del piano verticale, si determini:
   a) il valore minimo di V_0 affinché il sistema, dopo l'urto, riesca a fare un giro completo attorno al punto O;
   b) l'energia dissipata nell'urto, in corrispondenza a tale valore di V_0;
   c) la tensione **T** del filo immediatamente dopo l'urto.



Soluzione:

a) Perche riesca a fare almeno un giro, la differenza di Energia meccanica deve essere uguale al lavoro realizzato da un giro del sistema m+M.

Quindi:

$\Delta E_{(m+M)} = Lgiro_{(m+M)}$

$½\,(m+M).V_f^2 - ½\,(m+M).V_i^2 = Lgiro_{(m+M)}$ …(1)

Se realizza solo un giro, arriverà esattamente quando $V_f=0$.

Calcoliamo quindi la V_i, mediante conservazione della quantità di moto:

$m.V_0 + M.(0) = (m+M).V_i$

quindi:

$V_i = [m / (m+M)].\ V_0$

$V_i = [0{,}1 / (0{,}1 + 0{,}9)].\ V_0$

$V_i = 0{,}1.V_0$ …(2)

Quindi in (1):

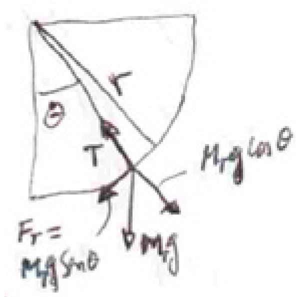
$-\ ½\,(m+M).(\ 0{,}1.V_0)^2 = Lgiro_{(m+M)}$

$-0{,}005.V_0^2 = Lgiro_{(m+M)}$ …(3)

Calcoliamo $Lgiro_{(m+M)}$, nel tratto 0 a 2π:

$Lgiro_{(m+M)} = \int \Sigma F.dS$

Forze che agiscono sulla massa totale:



$Lgiro_{(m+M)} = 2.\int_0^{\pi} [(m+M).g.\sin(\theta)].[r.d\theta].\cos(180)$

$Lgiro_{(m+M)} = -2.(m+M).g.\ r \int_0^{\pi} \sin(\theta).d\theta$

$Lgiro_{(m+M)} = -2.(m+M).g.\ r.[-\cos(\pi) + \cos(0)]$

$Lgiro_{(m+M)} = -4.(m+M).g.\ r$

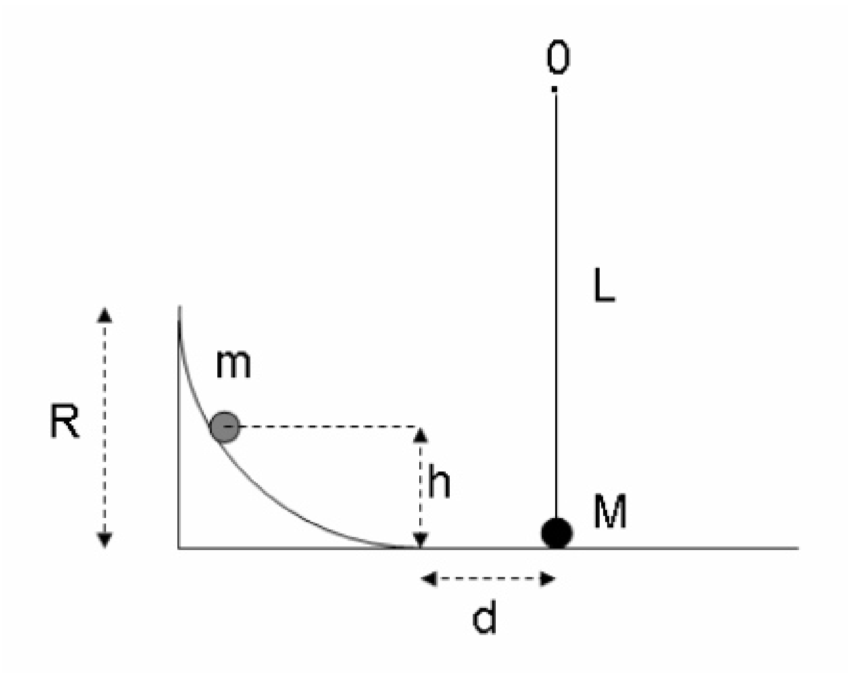
$Lgiro_{(m+M)} = -4.(1).(9{,}8).\ (0{,}8) = -31{,}36\ J$

In (3):
$-0{,}005.V_0^2 = -31{,}36$
$V_0 = 79{,}2$ m/s

b) L'energia dissipata nell'urto è dovuta al cambio di energia cinetica, dove V_o è la velocità del proiettile prima dell'impatto e V_i è la velocita del sistema m+M appena dopo l'impatto:
Da (1):
$V_i = 0{,}1.V_0$
$\Delta E = E_{f(m+M)} - (E_{im} + E_{iM})$
$\Delta E = ½.(m+M).V_i^2 - (½.m.V_o^2 + ½.M.(0)^2)$
$\Delta E = ½.(1).(0{,}1.V_o)^2 - (½.m.V_o^2 + ½.M.(0)^2)$
$\Delta E = ½.(1).(7{,}92)^2 - ½.(0{,}1).(79{,}2)^2$
$\Delta E = 31{,}36 - 313{,}63 = -282{,}27$ J

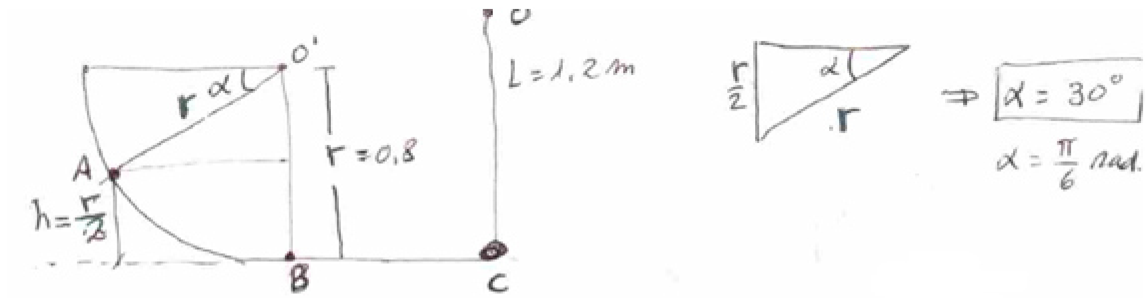
c) La tensione **T** del filo immediatamente dopo l'urto:
$T = -(m+M).g.\cos(0) = -g = 9{,}8$ N

4. (**Esame Settembre 2007**): Una particella di massa m = 0.5 kg scivola sulla superficie liscia di un cuneo cilindrico di raggio R = 0.8 m, partendo da fermo da un'altezza h = R/2 rispetto al suolo e dopo aver percorso una distanza d = 0.3 m lungo il piano orizzontale pure liscio, urta centralmente un corpo puntiforme di massa M = 1.5 kg posto in quiete sul piano e attaccato all'estremità libera di un filo ideale (inestensibile e privo di massa) lungo L = 1.2 m, che pende verticalmente e che ha l'altra estremità incernierata nel punto O fisso in un sistema di riferimento inerziale. La particella dopo l'urto rimane attaccata al corpo di massa M, e il sistema particella + corpo ruota nel piano verticale attorno al punto O, senza incontrare attrito alcuno. Calcolare:
a) il modulo della velocità V_0 di impatto della particella contro il corpo di massa M;
b) l'energia dissipata nell'urto;
c) il momento angolare L_0 del sistema particella + corpo subito dopo l'urto.



Soluzione:

a)



Tra i punti A e B, per conservazione dell'energia meccanica:

$U_A + K_A = U_B + K_B$

$m.g.h + ½.m.V_A^2 = m.g.(0) + ½.m.V_B^2$

$V_A = 0$; $V_B = V_C = V_0 = ?$

Quindi:

$½ V_o^2 = g.h$

$V_o = \sqrt{(2.g.h)} = \sqrt{(2.(9,8).(0,4)} = 2,8$ m/s

b) Energia dissipata nell'urto:

$\Delta E_{kc} = ½.(m + M).V_{c(m+M)}^2 - [½.m.V_{cm}^2 + ½.M.V_{cM}^2]$

$V_{cm} = V_0$; $V_{cM} = 0$; $V_{c(m+M)} = ?$

Calcoliamo V_c mediante conservazione della quantità di moto durante l'urto:

$m.V_{cm} + M.V_{cM} = (m+M).V_{c(m+M)}$

$V_{c(m+M)} = [m/(m+M)].V_o$

$V_{c(m+M)} = [0,5/(0,5+1,5)].(2,8) = 0,7$ m/s

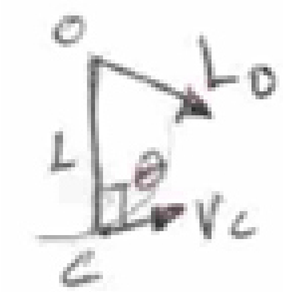
Quindi, l'energia dissipata sarà:

$\Delta E_{kc} = ½.(0,5 + 1,5).(0,7)^2 – [½.(0,5).(2,8)^2]$

$\Delta E_{kc} = ½.(0,5 + 1,5).(0,7)^2 – [½.(0,5).(2,8)^2]$

$\Delta E_{kc} = 0,49 – 1,96 = -1,47$ J

c) Il momento angolare L_0 del sistema sarà:



$\mathbf{L}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (Prodotto vettoriale del vettore posizione per la quantità di moto.

$\theta = 90^o$

$\mathbf{p} = (m + M).\mathbf{V_c}$

$\mathbf{L}_o = \mathbf{r} \times [(m + M).\mathbf{V_c}] = L.|(m + M).\mathbf{V_c}|.\sin(\theta)$

$\mathbf{L}_o = (1,2).(0,5 + 1,5).(0,7).\sin(90^o)$

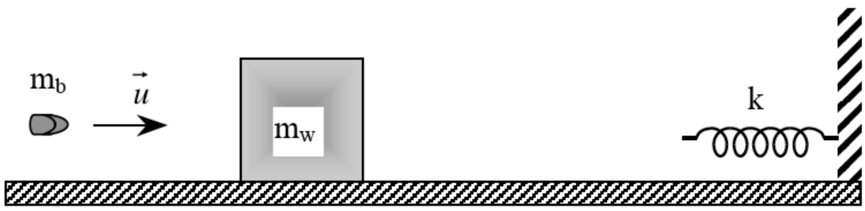
$\mathbf{L}_o = (1,2).(0,5 + 1,5).(0,7).\sin(90^o)$

$\mathbf{L}_o = 1,68$ Kg.m^2/s

5. (**Esame Giugno 2014**) Un proiettile è lanciato contro un blocco di legno, incastrandosi senza perdita di materiale. Il blocco più il proiettile è quindi libero di scivolare su una superficie orizzontale, comprimendo la molla come mostrato nel grafico. La molla rispetta la legge di Hooke. Le masse del proiettile e del blocco di legno sono rispettivamente m_b = 4,50 g e m_w = 1,63 kg.

   i) Prima di tutto bisogna fare un esperimento per calcolare la costante elastica della molla: Se il blocco viene messo in sospensione dalla molla e questa si estende ad una lunghezza di 14 cm: calcolare K.

   ii) Il proiettile viene lanciato contro il blocco, si incastra ed il gruppo proiettile-blocco scivola di 45 cm prima di comprimere la molla per 13 cm. Assumendo che la superficie sia liscia e priva di attrito calcolare la velocità del gruppo proiettile più blocco prima che la molla venga compressa.



Soluzione:

i) Calcoliamo la costante elastica della molla K:
$F = K.\Delta X$
F = Peso di $m_w = m_w.g$
$\Delta X = 0{,}14$ m
$K = m_w.g / \Delta X$
$K = (1{,}63).(9{,}81) / 0{,}14 = 114{,}2$ N/m

ii) Conservazione dell'energia (cinetica in elastica):
Sia Vo la velocità prima che la molla venga compressa, allora abbiamo:
$\frac{1}{2} (m_b + m_w).V_o^2 = \frac{1}{2} K.\Delta X^2$

Quindi:

$V_o^2 = K.\Delta X^2 / (m_b + m_w)$

$V_o = {\scriptstyle +/-}\ \Delta X \sqrt{[K / (m_b + m_w)]}$

$V_o = 0{,}13.\sqrt{[\ 114{,}2 / (0{,}045 + 1{,}63)]}$

$V_o = 1{,}073\ m/s$