

Logica booleana

Marta Capiluppi

marta.capiluppi@univr.it

Dipartimento di Informatica

Università di Verona

Algebra di Boole

Opera con i soli valori di verità 0 o 1 (variabili booleane o logiche)

L'algebra booleana risulta criptomorfa, cioè associata biunivocamente e in modo da risultare logicamente equivalente, ad un insieme parzialmente ordinato reticolato.

La struttura algebrica studiata dall'algebra booleana è finalizzata all'elaborazione di espressioni nell'ambito del calcolo proposizionale.

Ogni algebra booleana risulta criptomorfa ad un particolare tipo di anello, chiamato anello booleano.

Operatori logici AND, OR e NOT: la loro combinazione permette di sviluppare qualsiasi funzione logica e consente di trattare in termini esclusivamente algebrici le operazioni insiemistiche dell'intersezione, dell'unione e della complementazione, oltre a funzioni binarie.

Logica proposizionale

Linguaggio formale con struttura sintattica basata su proposizioni elementari (atomi) e su connettivi logici di tipo vero-funzionale (AND, OR, NOT...), che restituiscono il valore di verità di una proposizione in base al valore di verità delle proposizioni connesse

La definizione della struttura delle frasi (o sintassi) della logica proposizionale si fonda su due componenti:

- un alfabeto di simboli
- un insieme di sequenze di simboli (un linguaggio) definito tramite una grammatica generativa

NB: Una grammatica generativa è un insieme di regole che "specificano" o "generano" in modo ricorsivo le espressioni ben formate di un linguaggio.

Alle formule della logica proposizionale possono essere associati dei valori di verità mediante una funzione di valutazione

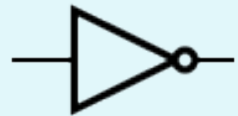
Operatori e Notazione

- Esistono convenzioni diverse:

• Negazione	not A	$\neg A$	$A !$	$- A$
• Congiunzione	A and B	$A \wedge B$	$A \& B$	$A \times B$
• Disgiunzione	A or B	$A \vee B$	$A B$	$A + B$
• Disgiunzione esclusiva	A xor B		$A \wedge B$	$A \oplus B$
[equivale a (A and (not B)) or ((not A) and B)]				
• Implicazione (se ... allora)		$A \rightarrow B$	$A \supset B$	$A \Rightarrow B$
• Doppia implicazione (se e solo se)		$A \leftrightarrow B$	$A \equiv B$	$A \Leftrightarrow B$

Operatori

A	<u>not A</u>
0	1
1	0



A	B	<u>A and B</u>
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



A	B	<u>A or B</u>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



A	B	<u>A xor B</u>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



A	B	<u>A ≡ B</u>
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



A	B	<u>A nand B</u>
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



A	B	<u>A nor B</u>
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Proprietà degli operatori booleani

Proprietà	AND ($\times$)	OR ($+$)
Identità	$A \times 1 = A$	$A + 0 = A$
Elemento nullo	$A \times 0 = 0$	$A + 1 = 1$
Idempotenza	$A \times A = A$	$A + A = A$
Inverso	$A \times (-A) = 0$	$A + (-A) = 1$
Commutativa	$A \times B = B \times A$	$A + B = B + A$
Associativa	$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Distributiva	$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$	$A + (B \times C) = (A + B) \times (A + C)$
Assorbimento	$A \times (A + B) = A$	$A + (A \times B) = A$
De Morgan	$-(A \times B) = (-A) + (-B)$	$-(A + B) = (-A) \times (-B)$

Dualità

Dalle proprietà degli operatori AND e OR si deduce il **principio di dualità**:

Se un'espressione è valida lo è anche l'espressione che si ottiene da quella di partenza cambiando tutti gli 0 in 1 e viceversa e cambiando tutti gli AND in OR e viceversa.

Ex:

Identità

$$A \times 1 = A$$

$$A + 0 = A$$

Espressioni booleane

I termini booleani possono essere combinati tra loro utilizzando gli operatori per costruire **espressioni booleane**

Le espressioni booleane (a differenza di quelle numeriche) possono essere rappresentate in forma esaustiva: ogni termine può assumere solo valore 0 o 1
➔ ogni espressione di n variabili può avere solo 2^n configurazioni diverse

Le configurazioni possono essere riportate nelle **tabelle della verità**, in cui vengono rappresentati appunto i valori di verità dell'espressione

Tabella della verità (I)

a	b	c	$a \times b$	$-a \times c$	$(a \times b) + (-a \times c)$
F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F
T	T	F	T	F	T
T	T	T	T	F	T

Tabella della verità (II)

a	b	c	$a + c$	$a + (-b)$	$(a + c) \times (a + (-b))$
F	F	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T

Proprietà delle espressioni booleane

- Equivalenza

- Due espressioni booleane sono **equivalenti** se hanno la medesima tabella della verità

- Tautologia

- Un'espressione booleana è una **tautologia** se è sempre vera
Esempio: **A OR (NOT A)**

- Contraddizione

- Un'espressione booleana è una **contraddizione** se è sempre falsa
Esempio: **A AND (NOT A)**

Dalla tabella all'espressione

- Conosciamo la tabella, ma non sappiamo qual è l'espressione
- Ci basta trovare una delle espressioni equivalenti che hanno questa tabella della verità

a	b	c	espressione
F	F	F	F
F	F	T	F
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	F
T	F	T	T
T	T	F	T
T	T	T	T

Dalla tabella all'espressione

Procedura:

1. identificazione di tutte le righe che hanno valore T;
2. per ogni riga identificata si costruisce una sottoespressione prodotto (and) di tutte le lettere che sono prese nella loro forma naturale o complementata seguendo i seguenti principi:
 - le lettere che nella riga in esame hanno valore T sono prese nella forma naturale;
 - le lettere che nella riga in esame hanno valore F sono prese nella forma complementata;
3. le sottoespressioni prodotto così ottenute vengono sommate (or) tra loro per realizzare l'espressione desiderata.

Dalla tabella all'espressione (1)

	a	b	c	espressione	
riga 0	F	F	F	F	
riga 1	F	F	T	F	
riga 2	F	T	F	F	
riga 3	F	T	T	T	←
riga 4	T	F	F	F	
riga 5	T	F	T	T	←
riga 6	T	T	F	T	←
riga 7	T	T	T	T	←

Dalla tabella all'espressione (2)

	a	b	c	espressione	
riga 0	F	F	F	F	
riga 1	F	F	T	F	
riga 2	F	T	F	F	
riga 3	F	T	T	T	← (-a) × b × c
riga 4	T	F	F	F	
riga 5	T	F	T	T	← a × (-b) × c
riga 6	T	T	F	T	← a × b × (-c)
riga 7	T	T	T	T	← a × b × c

Dalla tabella all'espressione (3)

	a	b	c	espressione	
riga 0	F	F	F	F	
riga 1	F	F	T	F	
riga 2	F	T	F	F	
riga 3	F	T	T	T	$\Leftarrow m_1 = (-a) \times b \times c$
riga 4	T	F	F	F	
riga 5	T	F	T	T	$\Leftarrow m_2 = a \times (-b) \times c$
riga 6	T	T	F	T	$\Leftarrow m_3 = a \times b \times (-c)$
riga 7	T	T	T	T	$\Leftarrow m_4 = a \times b \times c$

$$\text{expr} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$$

$$\text{expr} = ((-a) \times b \times c) + (a \times (-b) \times c) + (a \times b \times (-c)) + (a \times b \times c)$$

Verifica

a	b	c	$m_1 = (-a) \times b \times c$	$m_2 = a \times (-b) \times c$	$m_3 = a \times b \times (-c)$	$m_4 = a \times b \times c$	$m_1 + m_2 + m_3 + m_4$
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T	F	T
T	T	T	F	F	F	T	T

Un'espressione equivalente

a	b	c	$a \times b$	$a \times c$	$b \times c$	$(a \times b) + (a \times c) + (b \times c)$
F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T