lunedì 24 marzo 2014 09.28

METODO DI PUNTO FISSO

Consideriamo l'equazione

$$x = g(x) \qquad (1)$$

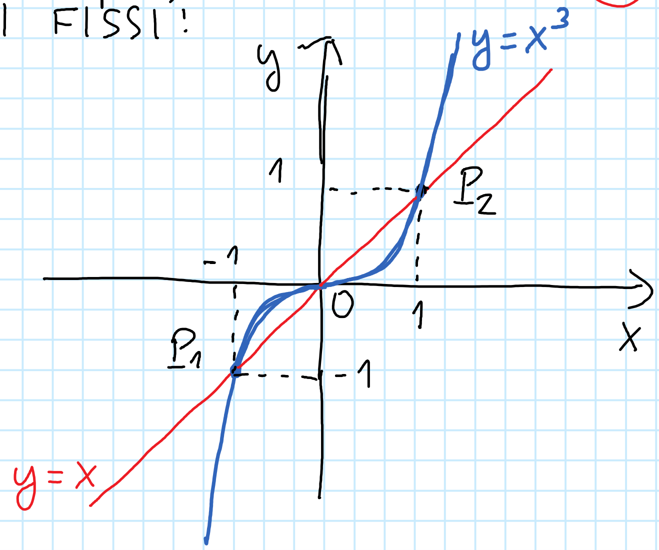
con g funzione.

DEF. Ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $\bar{x} = g(\bar{x})$ è detto PUNTO FISSO per g.

Graficamente, i punti fissi si trovano come le ascisse dei punti di intersezione della retta $y = x$ e del grafico $y = g(x)$ di g.

per uniformità alla notazione (1)

Ad esempio, consideriamo $x = \boxed{x^3} = g(x)$. Ci sono TRE PUNTI FISSI!



I tre punti fissi sono

$\bar{x}_1 = -1$ (ascissa di P_1)

$\bar{x}_2 = 0$ (ascissa di O)

$\bar{x}_3 = 1$ (ascissa di P_2)

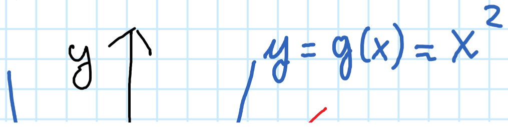
ESEMPIO Quali sono i punti fissi di $x = \boxed{x^2}$?

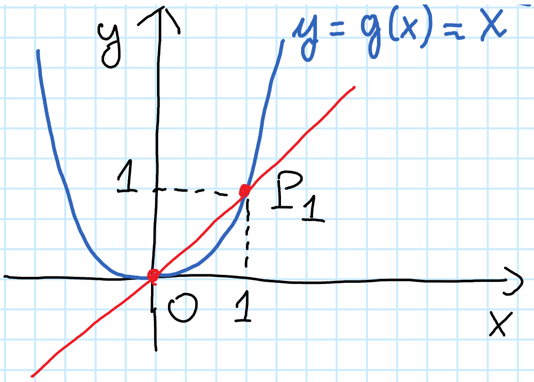
È $g(x) = x^2$. I punti fissi $\bar{x}$ risolvono l'equazione

$$\bar{x} = \bar{x}^2 \Rightarrow \bar{x}(\bar{x} - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \bar{x}_2 = 1.$$

Graficamente





L'equazione $f(x)=0$ può essere riscritta come $x = g(x)$ in infiniti modi. Ad esempio, sia $c(x)$ una funzione sempre diversa da zero. Allora

$$f(x) = 0 \iff c(x)\cdot f(x) = 0 \iff 0 = c(x)\cdot f(x)$$

$$\iff x = \boxed{c(x)\cdot f(x) + x}$$

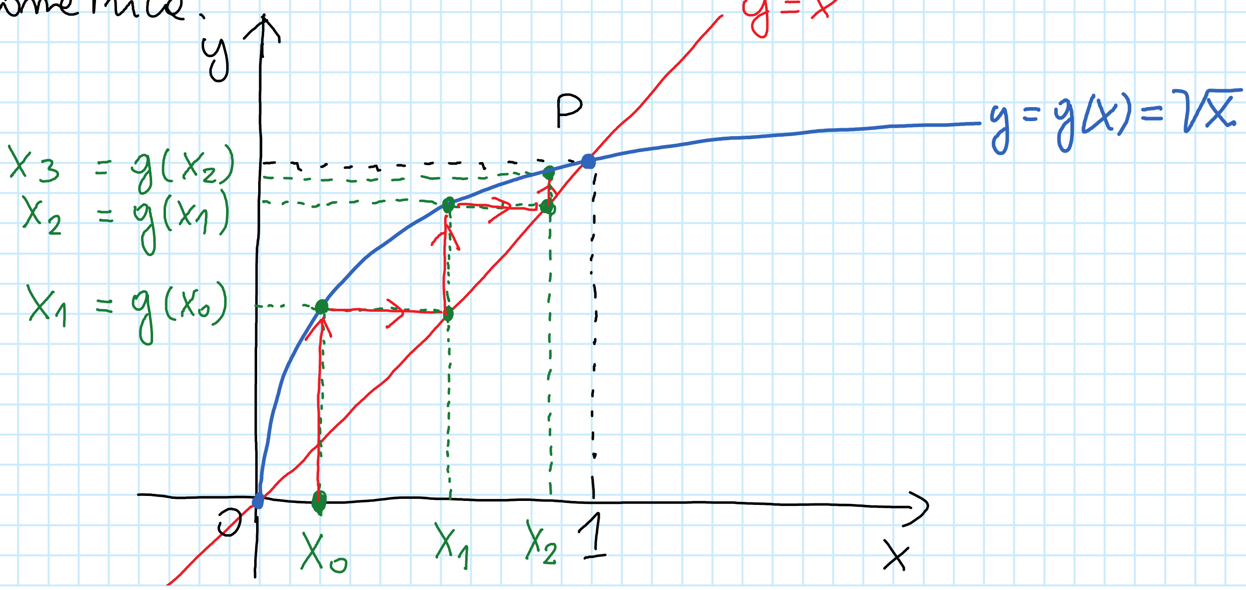
che è della forma $x = g(x)$ con $g(x) = x + c(x)\cdot f(x)$.

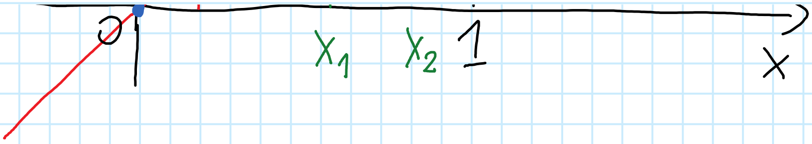
DEF. Dall'equazione $x = g(x)$ si costruisce il metodo o iterazione di punto fisso ponendo

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n)\,, \quad n = 0,1,2,\dots}$$

dove x_0 è il punto iniziale ed è dato.

Si presta ad una semplice ma utilissima interpretazione geometrica.





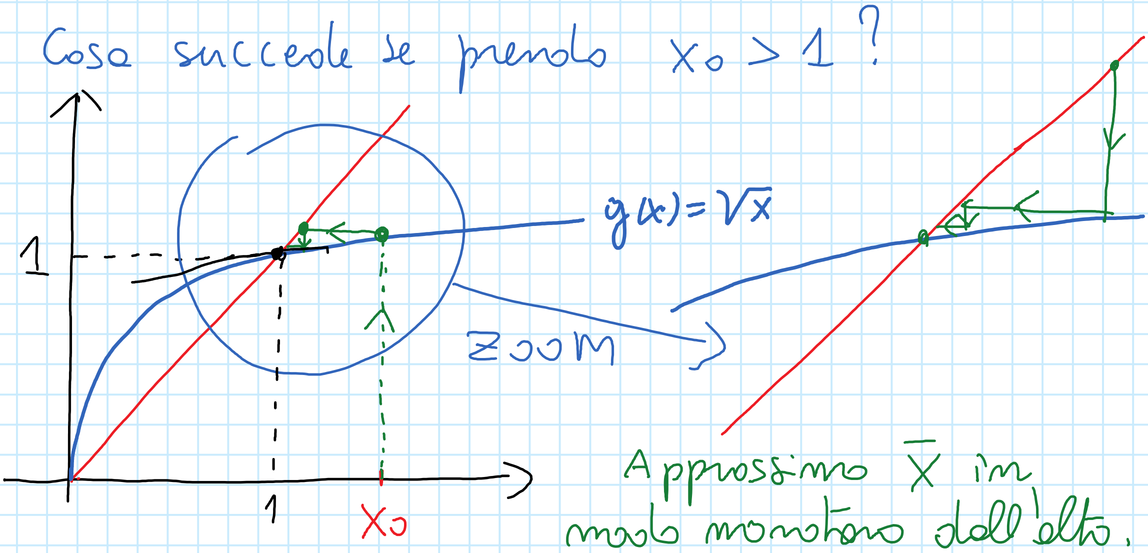
$x_1 = g(x_0)$
$x_2 = g(x_1)$
$x_3 = g(x_2)$

e così via. Il grafico mostra che

a) l'iterazione $x_{n+1} = g(x_n)$, x_0 dato in figura, converge al punto fisso $\bar{x} = 1$;

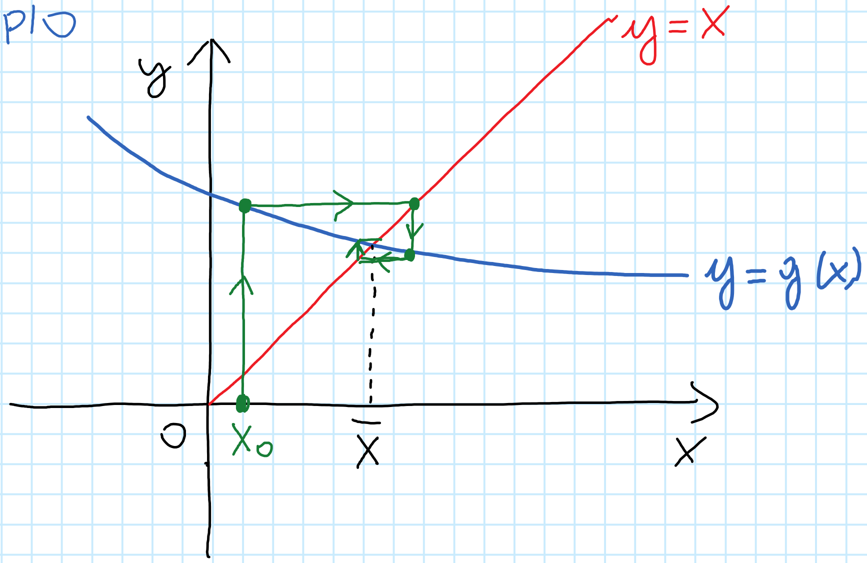
b) la successione x_n approssima $\bar{x} = 1$ dal basso in modo monotono ossia $x_n < x_{n+1}$.

DOMANDA: Cosa succede se prendo $x_0 > 1$?



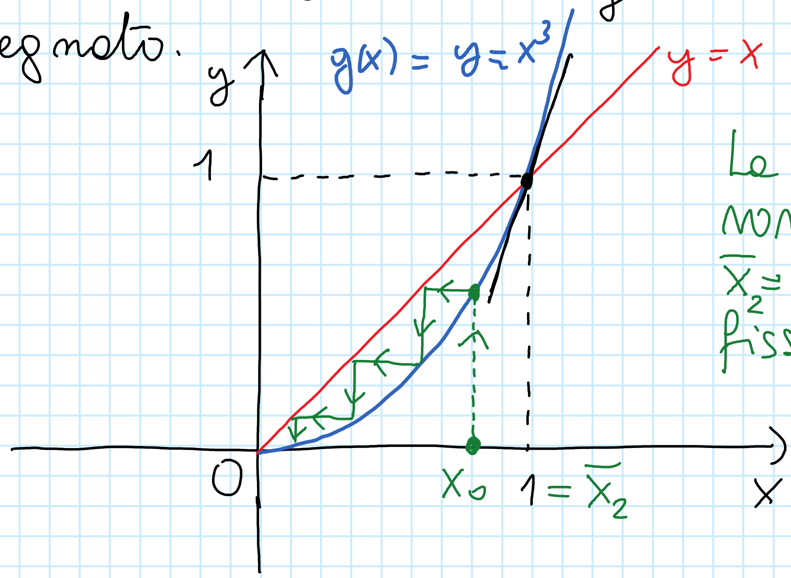
Approssimo $\bar{x}$ in modo monotono dall'alto.

ESEMPIO



In questo caso la convergenza di x_n avviene, alternativamente, dall'alto e dal basso.

NON SEMPRE c'è convergenza verso un punto fisso $\bar{x}$ assegnato.



La successione $x_{n+1} = g(x_n)$ NON converge al punto fisso $\bar{x}_2 = 1$ ma all'altro punto fisso $\bar{x}_1 = 0$.

TEOREMA [convergenza LOCALE]

Sia $g \in C^1$ in un intorno del punto fisso $\bar{x}$.
Se

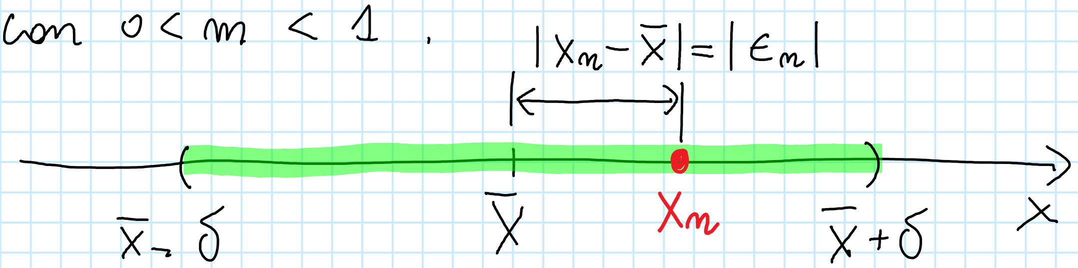
$$|g'(\bar{x})| < 1$$

allora il metodo di punto fisso $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ converge a $\bar{x}$ per ogni punto iniziale x_0 sufficientemente vicino a $\bar{x}$.
Inoltre, se $|g'(\bar{x})| > 1$ il metodo NON può convergere a $\bar{x}$ indipendentemente da quanto vicino a $\bar{x}$ venga scelto x_0 (purché $x_0 \neq \bar{x}$).

Dim: Poiché $|g'(\bar{x})| < 1$ esiste un intorno $I(\bar{x}, \delta)$ dove

$$|g'(x)| \leq m < 1 \qquad \forall x \in I(\bar{x}, \delta)$$

con $0 < m < 1$.



Facciamo vedere che se $x_0 \in I(\bar{x}, \delta)$, allora tutti gli $x_n \in I(\bar{x}, \delta)$. Dimostriamolo per induzione su n.

0) $x_0 \in I(\bar{x}, \delta)$ per ipotesi

n) supponiamo che $x_n \in I(\bar{x}, \delta)$ e facciamo vedere che anche x_{n+1} vi appartiene.
Consideriamo

$$\epsilon_{n+1} = \bar{x} - x_{n+1} = g(\bar{x}) - g(x_n) =$$

$$= \frac{g(\bar{x}) - g(x_n)}{\bar{x} - x_n} (\bar{x} - x_n) = (\text{Lagrange})$$

$$= g'(\xi_n)\,(\bar{x} - x_n)$$

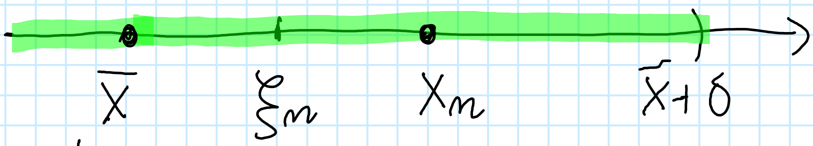
$$= g'(\xi_n) \cdot \epsilon_n$$

dove ξ_n è un punto opportuno compreso tra $\bar{x}$ e x_n. Perciò, passando ai valori assoluti, abbiamo

$$|\bar{x} - x_{n+1}| = \boxed{|g'(\xi_n)|} \cdot |\bar{x} - x_n|$$

$$\leq m^{<1}\, |\bar{x} - x_n| < |\bar{x} - x_n|$$

perché ξ_n è certamente interno all'intervallo $I(\bar{x}, \delta)$ perché ξ_n è compreso tra $\bar{x}$ e x_n e x_n, per ipotesi, è interno



per cui, essendo

$$|\bar{x} - x_{n+1}| < |\bar{x} - x_n|$$

il punto x_{n+1} è più vicino di x_n a $\overline{x}$
e quindi è interno a $I(\overline{x}, \delta)$.

Quindi, per induzione, tutti gli $x_n \in I(\overline{x}, \delta)$.

Ora, facciamo vedere che $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a $\overline{x}$.

Da quanto visto sopra abbiamo

$$\epsilon_{n+1} = g'(\xi_n) \cdot \epsilon_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

da cui segue

$$|\epsilon_{n+1}| = |g'(\xi_n)| \cdot |\epsilon_n| \underset{\xi_n \in I(\overline{x}, \delta)}{\leq} m \cdot |\epsilon_n| =$$

$$= m \cdot |g'(\xi_{n-1}) \cdot \epsilon_{n-1}| = m \cdot |g'(\xi_{n-1})| \cdot |\epsilon_{n-1}|$$

$$\leq m \cdot m \cdot |\epsilon_{n-1}| = m^2 \cdot |\epsilon_{n-1}| = \dots$$

$$\dots$$

$$= m^{n+1} \cdot |\epsilon_0|$$

Ora, $0 \leq m < 1 \implies$

$$\lim_{n \to +\infty} |\epsilon_{n+1}| = \lim_{n \to +\infty} \left(m^{n+1} \cdot |\epsilon_0| \right) =$$

$$= |\epsilon_0| \cdot \lim_{n \to +\infty} m^{n+1} = |\epsilon_0| \cdot 0 = 0$$

per cui $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n = \overline{x}$.

OSSERVAZIONE (TEST DI ARRESTO)

Per arrestare l'iterazione di punto fisso $x_{n+1} = g(x_n)$
si usa il test sullo scarto: dato toll > 0 e piccolo,
il metodo si arresta quando

il metodo si arresta quando

$$\boxed{|x_{n+1}-x_n| < toll.}$$

Vediamone l'affidabilità. Sappiamo che $\epsilon_{n+1} = g'(\xi_n)\cdot\epsilon_n$ nelle ipotesi del teorema precedente. Allora

$$x_{n+1}-x_n = (x_{n+1}-\bar{x}) + (\bar{x}-x_n) =$$
$$= -\epsilon_{n+1} + \epsilon_n$$
$$= -g'(\xi_n)\epsilon_n + \epsilon_n$$
$$= [1-g'(\xi_n)]\epsilon_n$$

per cui risulta (prendendo i valori assoluti)

$$|\epsilon_n| = \frac{|x_{n+1}-x_n|}{|1-g'(\xi_n)|} \approx \boxed{\frac{1}{|1-g'(\bar{x})|}}\, |x_{n+1}-x_n|$$

suppongo ξ_n vicino a $\bar{x}$ in modo che $g'(\xi_n) \approx g'(\bar{x})$

Dalla formula vediamo che se $g'(\bar{x}) \approx 1$ il test di arresto $|x_{n+1}-x_n| < toll$ è inaffidabile. Infatti, se, ad esempio, supponiamo che sia $1/|1-g'(\bar{x})| = 10^6$, quando il metodo termina perché

$$|x_{n+1}-x_n| < toll = 10^{-6} \quad \text{(assunzione!)}$$

l'errore, in realtà, non è 10^{-6} ma bensì

$$|\epsilon_n| \approx 10^6 \cdot 10^{-6} = 1$$

Viceversa, se $g'(\bar{x}) \approx 0$ il test è ottimale perché

$$|e_n| \approx |x_{n+1} - x_n|.$$

TEOREMA [ORDINE DI CONVERGENZA]

Sia $g \in C^1$ in un intorno del punto fisso $\bar{x}$.
Se

$$g'(\bar{x}) = 0$$
$$\vdots$$
$$g^{(r-1)}(\bar{x}) = 0$$
$$g^{(r)}(\bar{x}) \neq 0$$

allora il metodo di punto fisso $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$,
ha ordine di convergenza $p = r$ e costante asintotica dell'errore

$$M = \frac{|g^{(r)}(\bar{x})|}{r!}$$