$$\boxed{\Lambda^k(V^*) = \{ k\text{-forme su } V \}}$$

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE Prof. M. Spera

Lezione III

$\Lambda^1(V^*) = V^*$. Se $\dim V = n$,

è subito visto che $\Lambda^k(V^*)$ è uno spazio vettoriale

di dimensione $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

Dim. (cenno) Sia $e = (e_1 \dots e_n)$ una base (basis) qualsiasi (any) di V. ω è individuata dai valori

$\omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots e_{i_k})$, $i_1 < i_2 < \dots i_k$; infatti, in virtù

dell'antisimmetria, permutando gli indici si ottiene

$(\pm 1)\,\omega(e_1 \dots e_{i_k})$. Il numero dei "parametri liberi"

è dato dalle combinazioni di n oggetti in k posti

(gli argomenti della k-forma, si prescinde infatti dall'ordine) (up to order)

In maggiore dettaglio (detail), sia e^*_I, $I = (i_1 \dots i_k)$ multiindice, $i_1 < i_2 < \dots i_k$

la k-forma tale che $e^*_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} \pm 1 & \text{se } J = (j_1 \dots j_k) \text{ è una perm. di } I, \text{ a seconda della parità} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Si ha: $\omega = \sum \omega(e_{i_1} \dots e_{i_k})\, e^*_I$

Inoltre, le $\{e^*_I\}$ sono l. i. (verificarlo / check it) $\square$

In particolare, se $n < k$, è $\Lambda^k(V^*) = \{0\}$ sp. vett. banale (trivial v.sp.)

A breve otterremo un'espressione di e^*_I in termini di 1-forme

★ Prodotto esterno di forme (wedge product)

ω^k : k-forma

ω^l : l-forma

costruisce una $(k+l)$-forma così definita

$$(\omega^k \wedge \omega^l)(v_1 \dots v_{k+l}) :=$$

$$\frac{1}{k!\,l!} \sum (-1)^{\nu}\, \omega^k(v_{i_1} \dots v_{i_k})\, \omega^l(v_{i_{k+1}} \dots v_{i_{k+l}})$$

prodotto esterno (wedge) = cuneo

permutazioni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k+l \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{k+l} \end{pmatrix}$

$\nu = \begin{cases} 1 & \text{perm. dispari} \\ 0 & \text{perm. pari} \end{cases}$

[altra convenzione : il secondo membro è preceduto da $\frac{1}{(k+l)!}$ ⚠]

★ Proprietà

1. anticommutatività : (commutatività in senso graduato) "graded commutative"

$$\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl}\, \omega^l \wedge \omega^k$$

2. distributività

$$(\alpha\, \omega_1^k + \beta\, \omega_2^k) \wedge \omega^l = \alpha\, \omega_1^k \wedge \omega^l + \beta\, \omega_2^k \wedge \omega^l$$

3. associatività $(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^p = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^p)$
$$\equiv \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^p$$

Verifichiamo 1:

quanti scambi?

$$\left(i_1 \ \dots \ i_k \quad i_{k+1} \quad i_{k+l} \right)$$

$$\left(i_{k+1} \quad i_{k+l} \quad i_1 \ \dots \ i_k \right)$$

per arrivare qui ci vogliono k scambi

per portare via via $i_{k+2} \dots i_{k+l}$ nelle posizioni indicate

sono necessari $\underbrace{k + k + \dots k}_{l \text{ volte}} = kl$ scambi

e questo $\forall$ addendo. In definitiva, il coeff. dei prod. diventa $(-1)^{\nu + kl}$ e dato che

$$(-1)^{\nu} = (-1)^{\nu + kl} (-1)^{kl}, \quad (-1)^{kl} \text{ si può porre in evidenza } (+)$$

2 è chiara, 3 verrà illustrata più avanti

$(+)$ $$(\omega^k \wedge \omega^l)(v_1 \dots v_{k+l}) = \frac{1}{k!\,l!} \sum (-1)^{\nu} \omega^k (v_{i_1} \dots v_{i_k}) \omega^l (v_{i_{k+1}} \dots v_{i_{k+l}})$$

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum (-1)^{\nu} \omega^l (v_{i_{k+1}} \dots v_{i_{k+l}}) \omega^k (v_{i_1} \dots v_{i_k})$$

$$= (-1)^{kl} \frac{1}{k!\,l!} \sum \underbrace{(-1)^{kl+\nu}}_{\text{parità di } \binom{1 \ \dots \ k+l}{i_{k+1} \dots i_{k+l}}} \omega^l (v_{i_{k+1}} \dots v_{i_{k+l}}) \omega^k (v_{i_1} \dots v_{i_k})$$

$$= (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k (v_1 \dots v_{k+l})$$

☆ Verifichiamo l'associatività di $\wedge$

E' sufficiente verificarla per i monomi della forma $e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \dots e_{i_k}^*$, in virtù dell'induzione, di fatto ci basta verificare che, ad esempio, per fissare le idee,

$$(e_1^* \wedge e_2^*) \wedge e_3^* = e_1^* \wedge (e_2^* \wedge e_3^*)$$
$$= e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*$$

ed è sufficiente verificare l'uguaglianza su (e_1, e_2, e_3) (troveremo 1)

$$(e_1^* \wedge e_2^*) \wedge e_3^* \;(e_1, e_2, e_3) =$$

$$\frac{1}{2}\left[\underbrace{e_1^* \wedge e_2^* (e_1, e_2)}_{1} \underbrace{e_3^*(e_3)}_{1} - \underbrace{e_1^* \wedge e_2^* (e_2, e_1)}_{-1} \underbrace{e_3^*(e_3)}_{1}\right] \dots + \text{zero}$$

$$= \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Analogamente $e_1^* \wedge (e_2^* \wedge e_3^*) \;(e_1, e_2, e_3) = 1$

Si può procedere anche direttamente, in modo diverso, v. oltre

Esempi.

Nel caso di k $\underline{1\text{-forme}}$, si ha

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \omega_k \, (v_1 \dots v_k) = \dots$$

$$\begin{array}{c} v \text{ fisso} \\ \longrightarrow \end{array} \quad \begin{vmatrix} \omega_1(v_1) & & \omega_k(v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(v_k) & & \omega_k(v_k) \end{vmatrix} \quad \Big\downarrow \omega \text{ fisso}$$

volume di un iperparallelepipedo (parallelepipedo) opportuno in $\mathbb{R}^k$

$$\left(\underset{\mathbb{R}^n}{\xi} \longmapsto \underset{\mathbb{R}^k}{(\omega_1(\xi) \dots \omega_k(\xi))} \right)$$

in particolare, si consideri

$$e^*_{i_1} \wedge e^*_{i_2} \wedge \dots e^*_{i_k} \qquad i_1 < i_2 < i_k$$

1-forme

$\bigstar$ $\underline{\text{tali forme}}$ $\underline{\text{danno}}$ $\underline{\text{una}}$ $\underline{\text{base}}$ di $\Lambda^k(V^*)$

Si ha subito

Si ricordi $e^*_i(e_j) = \delta_{ij}$

$$(e^*_{i_1} \wedge e^*_{i_2} \wedge \dots e^*_{i_k})(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots e_{j_k})$$

$$= \begin{cases} \pm 1 & \{i_1 \dots i_k\} = \{j_1 \dots j_k\} \\ & \text{il segno è quello della permutazione corrispondente} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; e^*_I = e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}$$

definita precedentemente

$\star$ in $\mathbb{R}^2$

$$(e_1^* \wedge e_2^*)(v_1, v_2) = \qquad \begin{array}{l} v_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \\ v_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \end{array}$$

$$= (e_1^* \wedge e_2^*)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 , \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)$$

$$\alpha_1 \beta_1 (e_1^* \wedge e_2^*)(e_1, e_1) + \alpha_1\beta_2 \underbrace{(e_1^* \wedge e_2^*)(e_1, e_2)}_{= 1}$$

$$\begin{vmatrix} \overset{=1}{e_1^*(e_1)} & \overset{=0}{e_2^*(e_1)} \\ \underset{=0}{e_1^*(e_2)} & \underset{=1}{e_2^*(e_2)} \end{vmatrix}$$

$$(e_1^* \wedge e_2^*)(e_1, e_1) = \begin{vmatrix} e_1^*(e_1) & e_2^*(e_1) \\ e_1^*(e_1) & e_2^*(e_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

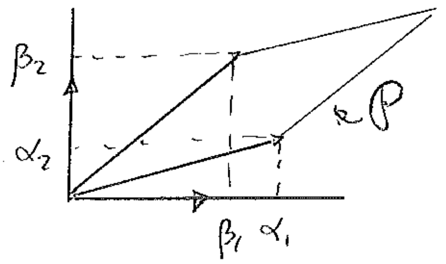
$$+ \alpha_2 \beta_1 \underbrace{(e_1^* \wedge e_2^*)(e_2, e_1)}_{= -1}$$

$$+ \alpha_2 \beta_2 \underbrace{(e_1^* \wedge e_2^*)(e_2, e_2)}_{= 0}$$

$$= \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

$\shortparallel$

area orientata di P



$\star$ in $\mathbb{R}^3$

$$(e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*)(\underset{\sum \alpha_i e_i}{v_1}, \underset{\sum \beta_i e_i}{v_2}, \underset{\sum \gamma_i e_i}{v_3})$$

(esercizio)

volume orientato

$$= \ldots = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \mathrm{vol}(v_1, v_2, v_3)$$

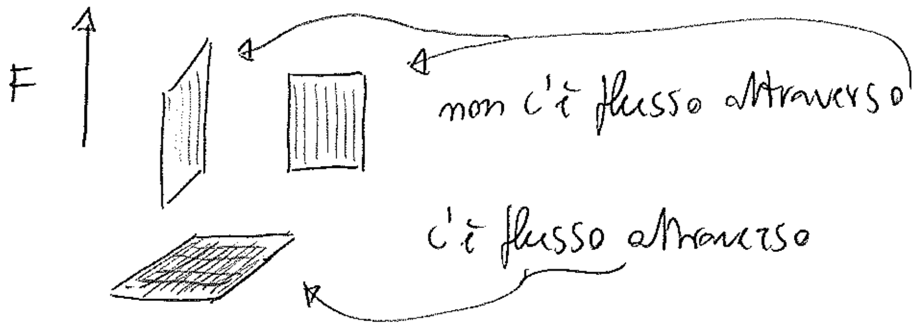
Riprendiamo, la $\underline{2\text{-forma}}$ $\underline{\text{di flusso}}$ $\underline{\Phi}_F$, questa

si può scrivere così:

misurano aree sui piani coordinati
(yz) (zx) (xy)

$$\underline{\Phi}_F = F_1\, e_2^* \wedge e_3^* + F_2\, e_3^* \wedge e_1^* + F_3\, e_1^* \wedge e_2^*$$

es. se $\underline{F} = F_3\, \underline{k}$



esempi/esercizi

In $\mathbb{R}^3$

Siano $\omega_a^1 = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i^*$ $\quad \underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\omega_b^1 = \sum_{i=1}^{3} b_i e_i^*$ $\quad \underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Calcoliamo $\omega_a^1 \wedge \omega_b^1$; esso uguaglia,

successivamente (ex.)

$$\sum_{i,j} a_i b_j \, e_i^* \wedge e_j^* = \dots =$$

componenti di $\underline{a} \times \underline{b}$

$$z \rightarrow (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, e_1^* \wedge e_2^* \; +$$

$$x \rightarrow (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, e_2^* \wedge e_3^* \; +$$

$$y \rightarrow (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, e_3^* \wedge e_1^*$$

Ancora la forma di flusso
(notazione diversa)

Ponendo $\omega_c^2 \doteq \omega_c^2(v_1, v_2) = \langle c, v_1 \times v_2 \rangle$
$= \det(c, v_1, v_2)$

Si ha subito $\omega_c^2 = c_1 e_2^* \wedge e_3^* + c_2 e_3^* \wedge e_1^* + c_3 e_1^* \wedge e_2^*$

infatti sec. membro $(e_1, e_2) = \dots = c_3$

$$\omega_c^2(e_1, e_2) = \det(c, e_1, e_2) = \begin{vmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \\ c_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\text{Laplace})$$

$$= (-1)(-c_3) = c_3$$

ecc. (completare)

In definitiva

$$\omega^1_a \wedge \omega^1_b = \omega^2_c \qquad \underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$$

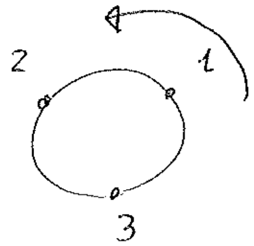
$\wedge$ si può vedere come una generalizzazione di $\times$, ma con le dovute cautele.

[concetto metrico

★ L'operatore di Hodge ($*$) su $\Lambda(\mathbb{R}^3)$

tutte le forme..

$$e_1^* \longmapsto e_2^* \wedge e_3^*$$
$$e_2^* \longmapsto e_3^* \wedge e_1^*$$
$$e_3^* \longmapsto e_1^* \wedge e_2^*$$



(in generale $\quad * : \Lambda^k \longrightarrow \Lambda^{n-k}$

Si ha (esercizio)

$$* \, \omega^2_c = \omega^1_c$$