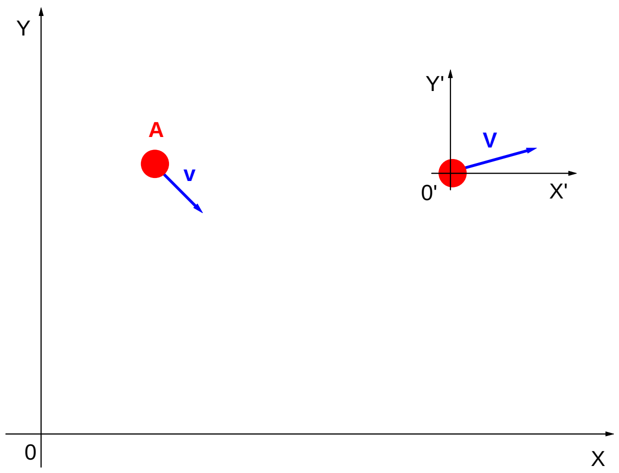
Problema n. 2

Un'auto da corsa A viaggia su un piano orizzontale con velocità costante **v** = 69 km/h **i** – 121 km/h **j** rispetto ad un osservatore solidale al suolo Oxy. Qual è la velocità dell'auto A misurata da un osservatore solidale ad un treno O'x'y' che viaggia con velocità costante **V** = 108 km/h **i** + 70 km/h **j** rispetto a Oxy ? Calcolare i moduli della velocità di A nei due sistemi di riferimento Oxy e O'x'y' e commentare il risultato.

Soluzione



Dati:

$$\vec{v} = 69\,{}^{Km}\!/_{h}\,\hat{i} - 121\,{}^{Km}\!/_{h}\,\hat{j}$$

$$\vec{V} = 108\,{}^{Km}\!/_{h}\,\hat{i} + 70\,{}^{Km}\!/_{h}\,\hat{j}$$

In figura abbiamo schematizzato la situazione descritta nel problema: l'auto A si muove lungo una generica traiettoria con velocità $\vec{v}$, rispetto al sistema di riferimento *fisso* OXY, mentre il treno viaggia con velocità $\vec{V}$, calcolata sempre rispetto al sistema di riferimento OXY. Definiamo anche un sistema di riferimento *mobile*, che chiamiamo O'X'Y', solidale con il treno.

(1) Calcolare la velocità di A rispetto ad un osservatore solidale con il sistema di riferimento O'X'Y'

Vogliamo calcolare la velocità dell'auto A rispetto ad un osservatore solidale con il sistema di riferimento mobile O'X'Y'; applichiamo quindi il teorema delle velocità relative che ci dice che la velocità *assoluta* di un oggetto (ovvero la velocità misurata rispetto ad un sistema di riferimento fisso) è uguale alla somma vettoriale della velocità *relativa* (la velocità misurata da un osservatore solidale con il sistema di riferimento mobile) e della velocità di *trascinamento* del sistema di riferimento mobile.

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t} \qquad (1)$$

Dove: $\vec{v}$ è la velocità assoluta

$\vec{v}'$ è la velocità relativa

$\vec{v}_t$ è la velocità di trascinamento

La velocità di trascinamento del sistema di riferimento mobile, è in generale la somma di un termine di moto traslatorio e di uno rotatorio, ma nel nostro caso il sistema mobile O'X'Y' trasla solo (con velocità pari a $\vec{V}$) rispetto al sistema fisso OXY e non ruota, quindi scriveremo che: $\vec{v}_t = \vec{V}$

Dalla (1), otteniamo quindi che la velocità relativa $\vec{v}'$ dell'auto, misurata rispetto al sistema di riferimento mobile O'X'Y', è data dalla relazione: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$

La relazione appena scritta è una relazione *vettoriale*, quindi riscriviamola in termini di componenti lungo le direzioni XY :

$$v'_x = v_x - V_x = 69\,{Km}/{h} - 108\,{Km}/{h} = -39\,{Km}/{h}$$
$$v'_y = v_y - V_y = -121\,{Km}/{h} - 70\,{Km}/{h} = -191\,{Km}/{h}$$

Otteniamo quindi che la velocità relativa dall'auto, ovvero la sua velocità misurata rispetto ad un osservatore solidale con il treno O'X'Y', è pari a:

$$\vec{v}' = -39\,{Km}/{h}\,\hat{i} - 191\,{Km}/{h}\,\hat{j}$$

(2) Calcolare i moduli della velocità di A nei due sistemi di riferimento Oxy e O'x'y' e commentare il risultato

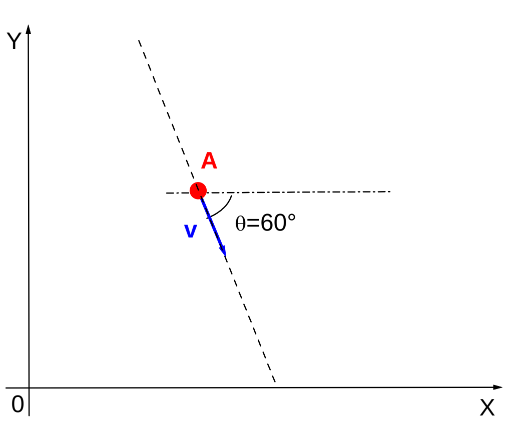
Per calcolare i moduli della velocità dell'auto A, misurata rispetto ai due sistemi di riferimento (quello fisso OXY e quello mobile O'X'Y') basta utilizzare le componenti delle due velocità $\vec{v}$ (fornite da problema) e $\vec{v}'$ (calcolate nel punto precedente):

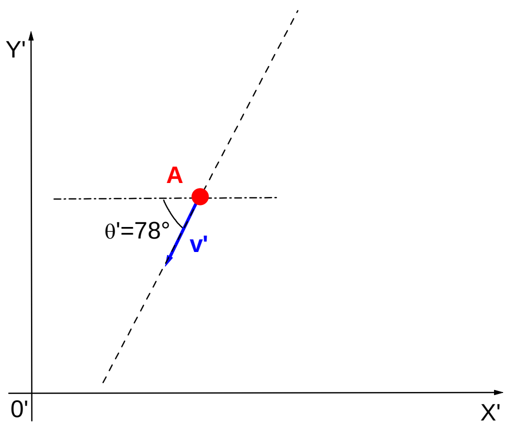
Sistema di riferimento OXY: $v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = \sqrt{\left(69\,{Km}/{h}\right)^2 + \left(-121\,{Km}/{h}\right)^2} \cong 139\,{Km}/{h}$

Sistema di riferimento O’X’Y’: $v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{\left(-39\,{}^{Km}\!/_{h}\right)^2 + \left(-191\,{}^{Km}\!/_{h}\right)^2} \cong 195\,{}^{Km}\!/_{h}$

I moduli calcolati delle due velocità, quella relativa e quella assoluta, ci indicano che due osservatori, uno fisso (cioè in quiete rispetto al riferimento OXY) e l’altro solidale con il sistema di riferimento O’X’Y’ vedono entrambi l’auto muoversi di *moto rettilineo uniforme*, ma con velocità differenti sia in modulo (in particolare, rispetto all’osservatore solidale con O’X’Y’, la velocità dell’auto risulta maggiore rispetto a quella misurata dall’osservatore solidale con OXY) che in direzione (come si deduce facilmente osservando le componenti della due velocità).

In particolare, rispetto al sistema di riferimento OXY, l’auto si muoverà su una traiettoria rettilinea formante un angolo di inclinazione θ di circa 60° rispetto all’asse X (è facile calcolarlo, utilizzando le componenti della velocità, dato che $tg\theta = \frac{v_y}{v_x}$), mentre rispetto al sistema O’X’Y’ l’auto percorrerà, con velocità superiore rispetto a quanto misurato dall’osservatore fisso, una traiettoria rettilinea come quella mostrata in figura (con angolo di inclinazione rispetto a X’ $\theta' = 78°$)



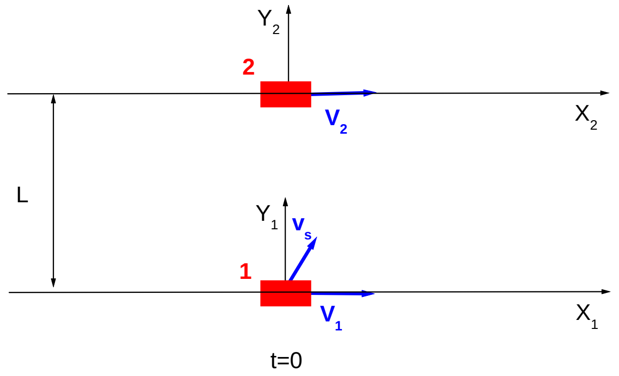


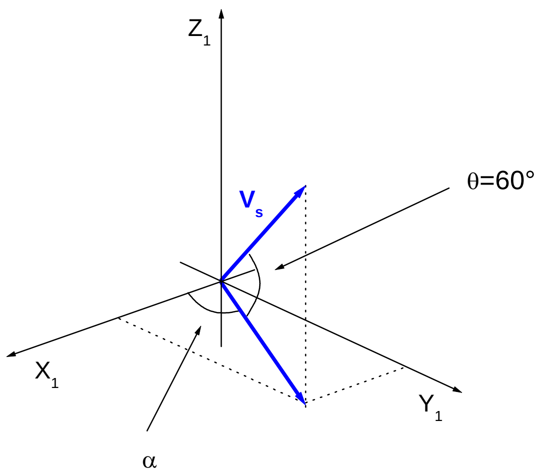
Problema n. 6

Due carrelli uguali si muovono su rotaie rettilinee parallele nello stesso verso ma con velocità diverse (rispettivamente $v_1 = 1\ ms^{-1}$ e $v_2 = 2\ ms^{-1}$). Nel momento in cui i due carrelli sono affiancati un sasso viene lanciato dal carrello l al carrello 2 con un angolo di lancio (alzo) $\theta = 60°$. Se la distanza fra i due carrelli è in quell'istante, pari a L = 2 m, calcolare le componenti della velocità di lancio del sasso affinché esso cada sul secondo carrello.

N.B: Si richiede il calcolo delle componenti della velocità misurate nel sistema di riferimento solidale con il carrello 1. Si assuma inoltre che l'angolo di lancio sia misurato in questo sistema di riferimento.

Soluzione





Dati:

$v_1 = 1 \, m/s$

$v_2 = 2 \, m/s$

$L = 2m$

$\theta = 60°$

? Calcolare la velocità $\vec{v}_s$ affinché il sasso lanciato dal carrello 1 cada sul carrello 2

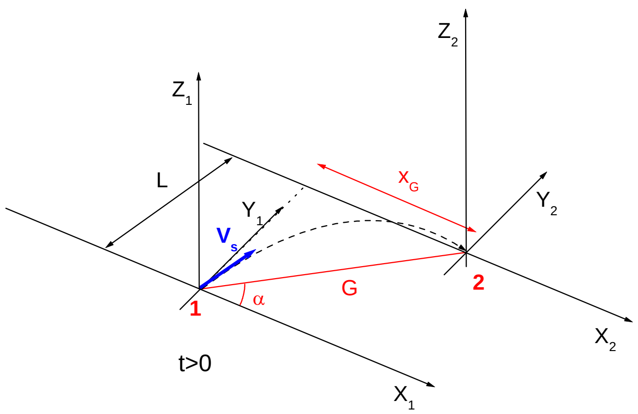
In figura abbiamo schematizzato la situazione descritta nel problema, nell'istante che noi prendiamo come iniziale $t = 0$, in cui il sasso viene lanciato dal carrello 1 verso il carrello 2.

Nella seconda figura è mostrato invece un particolare del vettore $\vec{v}_s$, che come si può vedere dalla figura possiede tre componenti, ognuna lungo le tre direzioni $X_1Y_1Z_1$ (ovvero gli assi del sistema di riferimento solidale con il carrello 1, rispetto a cui definiamo le componenti della velocità del sasso, nonché l'angolo di lancio θ): in particolare, dato che l'angolo di lancio è definito rispetto al piano orizzontale X_1Y_1, avremo che la componente verticale della velocità $\vec{v}_{sz}$ formerà un angolo θ di 60° con la componente della velocità lungo il piano X_1Y_1, che a sua volta è la somma vettoriale delle due componenti singole $\vec{v}_{sx}$ e $\vec{v}_{sy}$.

Introduciamo quindi l'angolo supplementare α, definendolo come in figura; in base a semplici osservazioni trigonometriche possiamo dunque scrivere le tre componenti di $\vec{v}_s$ come:

$$v_{sx} = v_s \cos\theta \cdot \cos\alpha$$
$$v_{sy} = v_s \cos\theta \cdot sen\alpha$$
$$v_{sz} = v_s sen\theta$$

Nella figura sottostante è schematizzato cosa accade dopo l'istante $t = 0$ di lancio del sasso: il sasso percorrerà una traiettoria parabolica (moto balistico) fino a cadere sul secondo carrello.



Tale moto parabolico del sasso è determinato dalle condizioni di velocità di lancio (che costituisce quindi la velocità iniziale del moto) che dobbiamo appunto determinare affinché il sasso riesca a cadere sul carrello 2.

Ora, le velocità dei due carrelli sono misurate rispetto ad un sistema di riferimento fisso (non rappresentato in figura), ma il problema ci chiede di calcolare $\vec{v}_s$ rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il carrello 1; definiamo quindi tale sistema di riferimento, che indicheremo come O'X'Y'Z' .

L’osservatore solidale con O’X’Y’Z’, vede naturalmente il carrello 1 fermo, ovvero $v_1' = 0$, mentre il carrello 2 muoversi di moto rettilineo uniforme (lungo una traiettoria parallela all’asse X’) con velocità in modulo pari a $v_2' \neq v_2$.
Infine, sempre lo stesso osservatore solidale a O’X’Y’Z’ vedrà il sasso staccarsi dal carrello 1 con velocità incognita $\vec{v}_s$ e con un angolo di lancio pari a $\theta = 60°$.

Per prima cosa calcoliamo la velocità relativa del carrello 2, ovvero la velocità misurata rispetto al sistema di riferimento O’X’Y’Z’: il teorema delle velocità ci dice che velocità assoluta (quella misurata rispetto a d un sistema di riferimento fisso e fornitaci dal problema) e velocità relativa sono legate dalla relazione

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t}$$

dove, anche in questo caso, la velocità di trascinamento $\vec{v}_t$ è composta solo di un termine traslatorio, in quanto non c’è rotazione del sistema O’X’Y’Z’ rispetto al sistema fisso.

Applicando la relazione sopra, scriveremo quindi che: $\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_t$ con $\vec{v}_t = \vec{v}_1$

Dato che le velocità che compaiono nella relazione sopra sono tutte dirette parallelamente all’asse X, possiamo riscrivere la relazione sopra come:

$v_2 = v_2' + v_1$

da cui $v_2' = v_2 - v_1 = 2 \, m/s - 1 \, m/s = 1 \, m/s$

Sempre nel sistema di riferimento O’X’Y’Z’, solidale con il carrello 1, il sasso compie un moto balistico le cui leggi del moto, lungo le tre direzioni X’Y’Z’, sono:

$$\begin{cases} x = v_s \cdot \cos\theta \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y = v_s \cdot \cos\theta \cdot sen\alpha \cdot t \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_s \cdot sen\theta \cdot t \end{cases}$$

Imponendo nella terza delle equazioni sopra la condizione $z = 0$, possiamo calcolare il tempo di volo del sasso: $t_{volo} = \frac{2 v_s \cdot sen\theta}{g}$

Sostituendo nelle altre due leggi del moto il valore trovato per il tempo di volo, otteniamo invece le componenti lungo le direzioni X’Y’ della gittata del sasso G :

$$\begin{cases} x_G = v_s \cdot \cos\theta \cdot \cos\alpha \cdot \dfrac{2v_s \cdot sen\theta}{g} \\ y_G = v_s \cdot \cos\theta \cdot sen\alpha \cdot \dfrac{2v_s \cdot sen\theta}{g} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2}{g} v_s^{\ 2} \cdot \cos\theta \cdot \cos\alpha \cdot sen\theta \\ y_G = \dfrac{2}{g} v_s^{\ 2} \cdot \cos\theta \cdot sen\alpha \cdot sen\theta \end{cases}$$

Affinché il sasso cada sul carrello 2, come richiesto dal problema, le componenti della gittata devono essere tali che:

$$\begin{cases} x_G = v'_2 \cdot t_{volo} \\ y_G = L \end{cases}$$

Dove nella prima delle due relazioni sopra si è espressa la condizione che durante un tempo pari al tempo di volo del sasso il carrello 2 deve percorrere lungo l'asse parallelo all'asse X' una distanza pari appunto alla componente lungo X' della gittata.

Le condizioni sopra si traducono quindi in un sistema di due equazioni e due incognite:

$$\begin{cases} v_s \cdot \cos\theta \cdot \cos\alpha = v'_2 \\ L = \dfrac{2}{g} v_s^{\ 2} \cdot \cos\theta \cdot sen\alpha \cdot sen\theta \end{cases}$$

Da cui, risolvendo otteniamo l'espressione per il modulo della velocità $\vec{v}_s$: $\boxed{v_s = \dfrac{v'_2}{\cos\theta \cdot \cos\alpha}}$

Sostituendo l'espressione sopra nella seconda equazione del sistema e riarrangiando i termini (ricordando in particolare che $\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$) otteniamo poi un'equazione di secondo grado per $sen\alpha$ che risolta ci da due valori, di cui uno può essere scartato essendo maggiore di 1: $sen\alpha = 0.91$

Dal valore di $sen\alpha$ otteniamo facilmente anche quello del coseno: $\cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} = 0.41$, da cui, con le opportune sostituzioni otteniamo infine:

$$\boxed{\begin{aligned} v_{sx} &= 1.0\, m/s \\ v_{sy} &= 2.2\, m/s \\ v_{sz} &= 4.2\, m/s \end{aligned}}$$