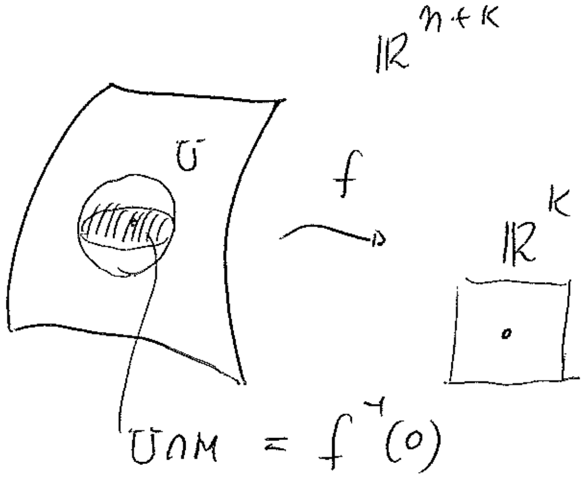
Sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+k}$ (Rif. Gallot-Hulin-Lafontaine)
submanifold

$M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ è detto sottovarietà n-dimensionale

se $\forall x \in M$ $\exists$ $U \ni x$ in $\mathbb{R}^{n+k}$ k = codimensione di M
intorno

submersion (+)
e una sommersione $f: U \to \mathbb{R}^k$
summersione
insieme di livello
(+)
(f_* suriettivo) tale che $U \cap M = f^{-1}(0)$
- level set



es. $S^n : \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = x_0^2 + \dots x_n^2 - 1 = 0 \}$

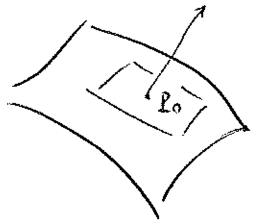
$$f_*|_x = (x_0 \dots x_n) \in (\mathbb{R}^{n+1})^*$$

$$f_*|_x h = 2\sum_{i=1}^{n} x_i h_i \in \mathbb{R}$$ suriettivo $\forall x \in S^n$

$h = \begin{pmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ (notare che $(x_0 \dots x_n) \neq 0$ $\forall x \in$

sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+1}$ di dimensione n
(codimensione 1) $\equiv$ ipersuperficie
hypersurface

La teoria del Dini rivisitata
Dini's theory revisited



★ $f(x,y,z) = 0$

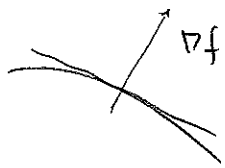
$$f_* = df \; : \; \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \rightsquigarrow \nabla f \neq \underline{0}$$

(localmente, se $\frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \neq 0$, $z = z(x,y)$)

f_* è suriettivo $\iff$ almeno una der. parziale è $\neq 0$

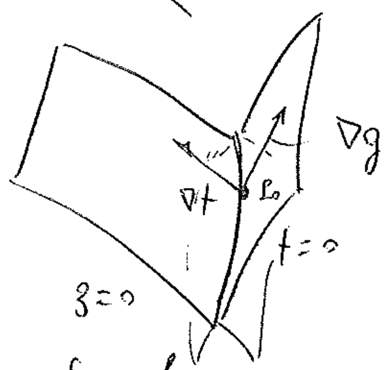
★ $f(x,y) = 0$

idem



(Dini originale)

★ $\begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \end{cases}$



$$F_* = (f_*, g_*) \text{ suriettivo } \iff r\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = 2$$

(rango = 2)

$\iff \nabla f \times \nabla g \neq \underline{0}$

i.e. ∇f e ∇g l. i.

($\iff$ non $/\!/$; non prop.)

se $\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}(P_0) \neq 0$, loc.

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

$\star$ $H^n_c = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ g_c(x) = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 - c \} = 0$

iperboloide

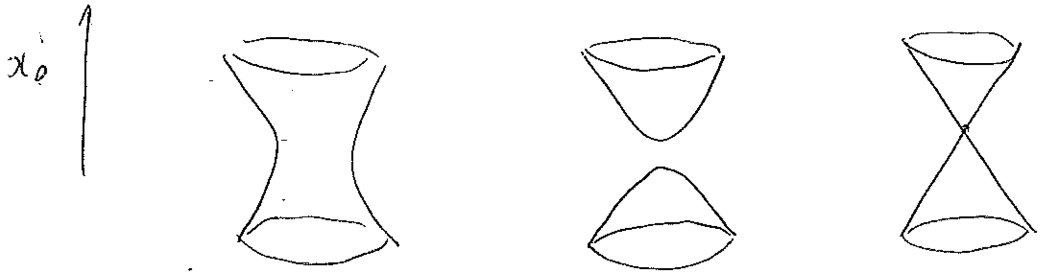
per $c \neq 0$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+1}$

$$f_*\big|_x = (2x_0, -2x_1 \dots -2x_n)$$

suriettivo per $c \neq 0$ $\forall x \in H^n_c$

per $c = 0$, $f_*\big|_0$ è nullo ($\Rightarrow$ non suriettivo)

$H^n_0 \setminus \{0\}$ è una s. varietà.



$c < 0$ $\quad$ $c > 0$ $\quad$ $c = 0$

Se $\overset{h}{\cong}$ $\bigcirc$

Sia rimuova da $\bigcirc$ $h(0)$

dovrei avere un omeom tra due spazi top. uno connesso e l'altro no, ciò che è impossibile

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - c = 0$$

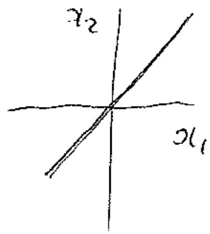
(f_* nullo in $(0,0)$)

non è una sommersione

Osservare: $M = \{ x \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(x) = x_1^3 - x_2^3 = 0 \}$

$= \{ x \in \mathbb{R}^2 / \ g(x) = x_1 - x_2 = 0 \}$

$\uparrow$ è una sommersione



$\star$ n-Toro $\quad \mathbb{T}^n = \{ z = (z_1 \dots z_n) \ / \ |z_i|^2 = 1 \}$

$= \{ x = (x_1 \dots x_{2n}) \ / \ f(x) \equiv (x_1^2 + x_2^2 - 1, \dots x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1) = 0 \}$

è una sottovarietà di $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$

$$SO(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ A^t A = \overset{O(n)}{A A^t} = I_n \ , \ \det A = 1 \}$$

È una sottovarietà di $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (oss. se $A \in O(n)$, è $\det(A) = \pm 1$)

di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$.

$$Gl_n^+(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ \det A > 0 \}$$

è aperto in $M_n(\mathbb{R})$

Sia $f : Gl_n^+(\mathbb{R}) \longrightarrow Sym_n$

$$A \longmapsto f(A) = A^T A - I_n$$

$$SO(n) = f^{-1}(0)$$

f è una sommersione

$$\boxed{f^*|_A H = A^T H + H^T A}$$

Infatti, sia $A = A(t)$ curva liscia in Gl_n^+ tale che $A(0) = A$, $\mathring{A}(0) = H$ (es: $A(t) = A + tH$)

si calcoli

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[A(t)^T A(t) - I_n\right]\Big|_{t=0}}$$

$$\mathring{A}^T(0)\, A(0) + A(0)^T \mathring{A}(0)$$

$\mathring{A}^T(0) = A(0)^T = H^T$, $A(0) = A$, $A(0)^T = A^T$, $\mathring{A}(0) = H$

$$= \boxed{H^T A + A^T H}$$

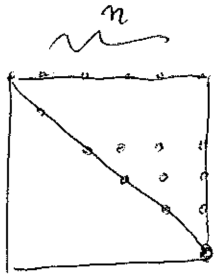
Ansatz (in tedesco: tentativo) è parola della letteratura matematica internazionale

Se S è simmetrica, posto $H = \frac{AS}{2}$, è

$$\left(\frac{AS}{2}\right)^T A + A^T \frac{AS}{2} = \frac{1}{2} \underset{= S}{S^T} \underbrace{A^T A}_{I} + \frac{1}{2} \underbrace{A^T A}_{I} S = S$$

$\Rightarrow f^*|_A$ è suriettivo

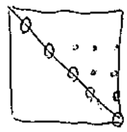
Osserviamo che $\dim \underset{\substack{\uparrow \\ \text{è uno sp. vettoriale}}}{\mathrm{Sym}_n} = \dfrac{n(n+1)}{2}$



$$\dim = 1 + 2 + \dots n = \frac{n(n+1)}{2} = \operatorname{codim} SO(n)$$

$$\Rightarrow \quad \dim SO(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^2 - n^2 - n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Osservazione $\dim \underset{\text{m. antisimmetriche}}{\mathrm{Asym}_n} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ (chiaro... ↗)



[Non è un caso: $\mathrm{Asym}_n = \underset{\substack{\text{algebra di} \\ \text{Lie di } SO(n)}}{\mathfrak{so}(n)}$ v. oltre..]

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$: è $A = \underbrace{\dfrac{A + A^T}{2}}_{\in \mathrm{Sym}_n} + \underbrace{\dfrac{A - A^T}{2}}_{\in \mathrm{ASym}_n}$

e tale scrittura è unica. In altre parole

$$M_n = \mathrm{Sym}_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma diretta}}}{\oplus} \mathrm{ASym}_n$$

Non solo, se poniamo $\langle A, B \rangle := \mathrm{Tr}(A^T B)$, $A, B \in M_n$, Tr = traccia

abbiamo un <u>prodotto scalare</u> Frobenius Hilbert-Schmidt

e Sym_n e ASym_n risultano l'uno il <u>complemento</u> <u>ortogonale</u> dell'altro

$$(A^TA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A^T)_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} A_{kj}$$

$$\mathrm{Tr}\,(A^TA) = \sum_{i=1}^{n} (A^TA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}^2$$

Siano $A = A^T$, $B = -B^T$. È $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}\,(A^TB) = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

Ma è pure $\langle A,B\rangle = \langle B,A\rangle = \mathrm{Tr}\,(B^TA) = -\mathrm{Tr}(BA)$

sicché $\mathrm{Tr}\,(BA) = 0 \Rightarrow \langle A,B\rangle = 0$

◇ ◇ ◇

$A, B \in M_n$

$\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$

[posto $[A,B] := AB - BA$ commutatore di A e B è $\mathrm{Tr}\,([A,B]) = 0$

"sopra la traccia il commutatore campa, sotto la traccia il commutatore crepa"]

check:

$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \qquad \mathrm{Tr}\,(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{k,h=1} A_{ik} B_{ki}$$

$$= \sum_{k,h=1}^{n} A_{ki} B_{ik} = \sum_{k,h=1}^{n} B_{ik} A_{ki}$$

cambia nomi

$$= \mathrm{Tr}\,(BA)$$

$\Rightarrow$ Tr è invariante per similitudine:

$$\mathrm{Tr}\,(S^{-1}AS) = \mathrm{Tr}(S^{-1}(AS)) = \mathrm{Tr}((AS)S^{-1}) = \mathrm{Tr}(ASS^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$$

Se $p_C^A(\lambda) = \prod(\lambda_i - \lambda)$ (λ_i autov.), $A \underset{\text{simile}}{\sim} U$, U triangolare superiore

e $U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}\,A = \mathrm{Tr}\,(U) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$