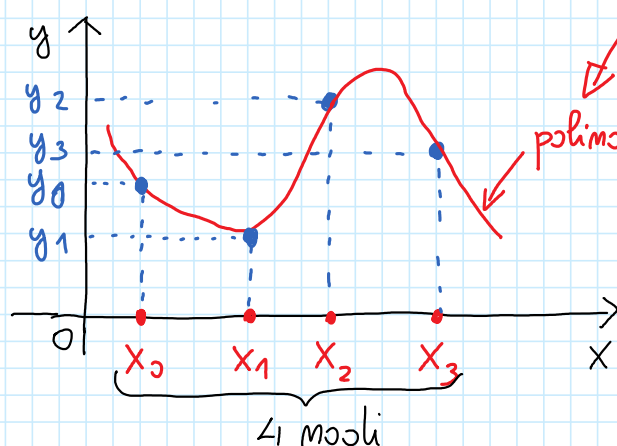


PREAPPELLO (esame scritto in sostituzione degli appelli ufficiali):

28/5 (mercoledì)

4/6 (mercoledì)

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE



Siamo
 $x_i, i = 0, \dots, m$

$m+1$ punti **DISTINTI** (detti **NODI**)

Siamo
 $y_i, i = 0, \dots, m$
 $m+1$ valori.

Vogliamo trovare un polinomio, di grado al più m , che soddisfa le CONDIZIONI DI INTERPOLAZIONE

$$P_m(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, m$$

dove $P_m(x)$ è il polinomio di interpolazione

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$$

ESEMPIO Consideriamo il caso $m = 2$ con nodi x_0, x_1, x_2 .
 Le condizioni di interpolazione sono

$$P_2(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2$$

che scritte per esteso sono

$$\begin{cases} P_2(x_0) = y_0 \\ P_2(x_1) = y_1 \\ P_2(x_2) = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2(x_1) = y_1 \\ P_2(x_2) = y_2 \end{cases}$$

Queste condizioni permettono di determinare $P_2(x)$; infatti posto

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

ho

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

↪ matrice di Vandermonde di ordine 3.

Risolvendo il sistema lineare si trovano a_0, a_1, a_2 e quindi $P_2(x)$.

In generale se abbiamo $n+1$ punti $x_0, x_1, \dots, x_n$ si ottiene un sistema lineare del tipo precedente

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

matrice di Vandermonde

Le matrici di Vandermonde sono NON singolari se i nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$ sono tutti distinti. Quindi, il sistema lineare (*) ha un'unica soluzione e dunque c'è un solo polinomio che soddisfa le condizioni di interpolazione.

Numericamente, la matrice di Vandermonde è FORTEMENTE MAL CONDIZIONATA già per $n \approx 5$ rendendo critica la soluzione di (*). Giusto per avere un'idea

numero di nodi 5 8 16

$\kappa(V)$ 10^3 10^9 10^{23}

Ci sono però delle strade alternative per calcolare $P_n(x)$.

Ne vediamo due:

- (*) polinomi di Lagrange;
- (*) differenze divise.

FORMULA DI LAGRANGE

Siamo dati $m+1$ nodi distinti $x_0, x_1, \dots, x_m$.

Si definisce POLINOMIO DI LAGRANGE i -esimo

$$L_i^{(m)}(x) = \frac{\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m (x - x_r)}{\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m (x_i - x_r)}, \quad i = 0, \dots, m$$

Sono $m+1$ polinomi di grado m . Vale la

PROP.

$$(a) \quad L_i^{(m)}(x_k) = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases}$$

$$(b) \quad \sum_{i=0}^m L_i^{(m)}(x) = 1 \quad (\text{funzione costante})$$

Vediamo i perché di (a). Consideriamo $L_i^{(m)}(x_k)$ per $k = i$:

$$L_i^{(m)}(x_i) = \frac{\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m (x_i - x_r)}{\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m (x_i - x_r)} = 1$$

Sic $k \neq i$:

$$L_i^{(m)}(x_k) = \frac{\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m (x_k - x_r)}{\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m (x_i - x_r)} = 0$$

per $r = k$ il termine $(x_k - x_k) = 0$
e quindi la numerazione è nulla

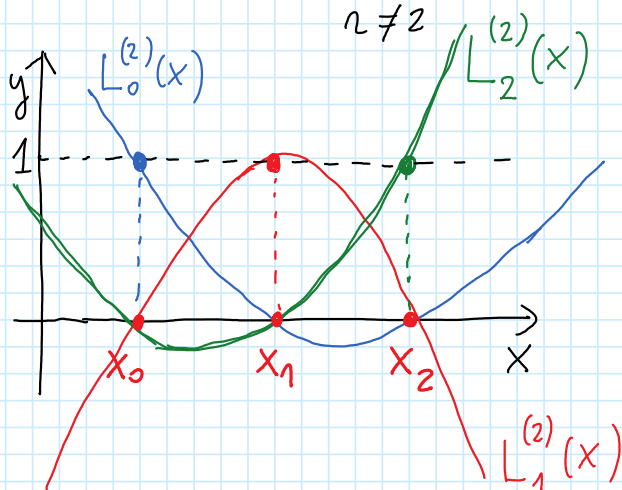
$$\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq i}}^m (x_i - x_n)$$

Vediamo un esempio per $m=2$ e nodi x_0, x_1, x_2 :

$$L_0^{(2)}(x) = \frac{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq 0}}^2 (x - x_n)}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq 0}}^2 (x_0 - x_n)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1^{(2)}(x) = \frac{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^2 (x - x_n)}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^2 (x_1 - x_n)} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2^{(2)}(x) = \frac{\prod_{\substack{n=0, n \neq 2}}^2 (x - x_n)}{\prod_{\substack{n=0, n \neq 2}}^2 (x_2 - x_n)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$



Notare che i polinomi di Lagrange dipendono SOLO dai nodi $x_0, x_1, \dots, x_m$.

Consideriamo ora anche $m+1$ valori $y_i, i=0, \dots, m$ e cerchiamo il polinomio che verifica

$$P_m(x_i) = y_i, \quad i=0, \dots, m.$$

Vale il seguente

TEOREMA

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^m y_i L_i^{(m)}(x).$$

Dim. Facciamo vedere che $P_m(x)$ così espresso soddisfa le condizioni di interpolazione.

$$P_m(x_k) = \sum_{i=0}^m y_i L_i^{(m)}(x_k) =$$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m y_i \underbrace{L_i^{(m)}(x_k)}_0 + y_k \underbrace{L_k^{(m)}(x_k)}_1 =$$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m y_i \cdot 0 + y_k \cdot 1 = y_k$$

per $k = 0, 1, \dots, m$. Allora P_m soddisfa le condizioni di interpolazione.

ESERCIZIO Dimostrare che $\sum_{i=0}^m L_i^{(m)}(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

[Sugg. considerare $y_i = 1$, $i = 0, \dots, m+1$ e osservare che il polinomio che soddisfa le condizioni di interpolazione $P_m(x_i) = 1$, $i = 0, \dots, m$ è $P_m(x) = 1$].

Nel caso in cui i valori y_i sono ottenuti a partire da una funzione f , ossia

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, \dots, m$$

ha senso considerare l'errore

$$E_m(x) = f(x) - P_m(x)$$

dove P_m è il polinomio di interpolazione.

Vece è un polinomio notevole

PROP. Siano $x_i, i=0, \dots, n$ $n+1$ nodi distinti.

Sia $I = [\min(x_i), \max(x_i)]$ intervallo.

Supposto che $f \in C^{(n+1)}(I)$, esiste un $\bar{x} \in I$ tale che

$$E_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}$$

dove $\bar{x}$ è un punto che dipende da x .

Dim. Omissa.

Siccome $\bar{x}$ NON è noto, si dà una maggiorazione del valore assoluto dell'errore

$$\begin{aligned} |E_n(x)| &= \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \cdot \frac{|f^{(n+1)}(\bar{x})|}{(n+1)!} \leq \\ &\leq \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \cdot \frac{\max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Spesso, noto f , conviene approssimare in un intervallo I con il polinomio di interpolazione scegliendo $n+1$ nodi distinti in I . Fatto ciò, si demandano le operazioni sul polinomio P_n :

$$f(\tilde{x}) \approx P_n(\tilde{x})$$

$$f'(\tilde{x}) \approx P'_n(\tilde{x})$$

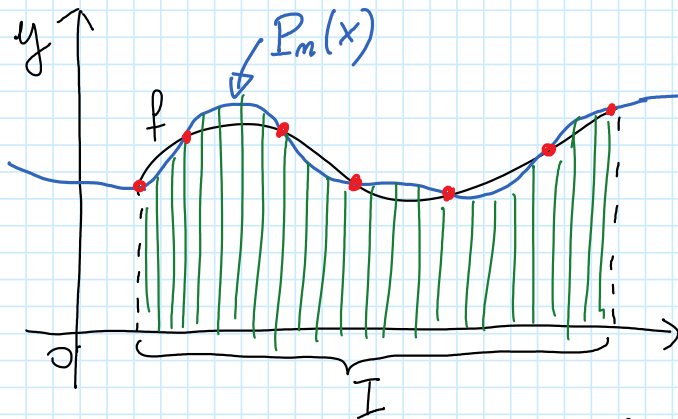
$$\int_I f(x) dx \approx \int_I P_n(x) dx$$

$P_n, P_{n-1} ?$ <:.

Perché? Sia

$$f(x) = \frac{\sin^5(e^{\arctg(x)}) + \cos(2\sin(x^3))}{[x^4 + \cos^3(e^x - 1)]^4 + 1}$$

e proviamo a calcolare
 $\int_0^1 f(x) dx \dots$



Funzione bene (ossia $\int_I f(x) dx \approx \int_I P_m(x) dx$)
 finché il grado $\neq$
 del polinomio è
 basso! ($m \approx 3, 4$),

Per n più grandi, bisogna scegliere con un certo
 criterio i nodi nell'intervallo I per avere un errore
 contenuto (fenomeno di Runge e nodi di Chebyshev).